Uppgift B9.38

Deluppgift A

Vi skall lösa

$$y''' + y'' - 4y' - 4y = 2 - 4x.$$

Betrakta först den homogena ekvationen

$$y''' + y'' - 4y' - 4y = 0.$$

Den karaktäristiska ekvationen är

$$r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0$$

med lösningarna[1]

$$r \in \{-2, -1, 2\}.$$

Alltså är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$y_H(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x} + Ce^{2x}.$$

För att finna *en* partikulärlösning till den ursprungliga, inhomogena, ekvationen, ansätter vi

$$y = C_1 + C_2 x \Rightarrow y' = C_2 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow y''' = 0$$

som vid insättning ger

$$-4C_2 - 4C_1 - 4C_2 x = 2 - 4x$$

d.v.s.

$$\begin{cases} -4(C_1 + C_2) = 2 \\ 4C_2 = 4 \end{cases}$$

med lösningen $(C_1, C_2) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$. Alltså är en partikulärlösning

$$y_P(x) = -\frac{3}{2} + x$$

och den allmänna lösningen till den ursprungliga ekvationen är

$$y(x) = y_H + y_P = Ae^{-2x} + Be^{-x} + Ce^{2x} - \frac{3}{2} + x.$$

Deluppgift B

Vi skall nu lösa

[1] Prövning ger att t.ex. $r = -1$ är en lösning, varvid de två andra kan erhållas som nollställena till det polynom du erhåller om du delar $r^3 + r^2 - 4r - 4$ med $r + 1$.

$$y''' - y'' - 2y' = 4x + 3.$$

Den homogena ekvationen

$$y''' - y'' - 2y' = 0$$

har den karaktäristiska ekvationen

$$r^3 - r^2 - 2r = r(r^2 - r - 2) = 0$$

med lösningarna

$$r \in \{-1, 0, 2\}$$

så att den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är

$$y_H(x) = Ae^{-x} + B + Ce^{2x}$$

[eftersom $e^{0x} = 1$].

För att finna *en* partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen ansätter vi

$$y = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx \Rightarrow y' = 2Ax + B \Rightarrow y'' = 2A \Rightarrow y''' = 0$$

[enligt generaliseringen till ordning differentialekvationer av ordning 3 av ”receptet” i Forsling på sidan 406]. Instoppning ger

$$-2A - 4Ax - 2B = 4x + 3$$

som ger $A = -1$ och $B = -\frac{1}{2}$, och därmed är

$$y_P(x) = -x^2 - \frac{1}{2}x$$

en partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen, som alltså har den allmänna lösningen

$$y(x) = y_H + y_P = \ Ae^{-x} + B + Ce^{2x} - x^2 - \frac{1}{2}x.$$

Deluppgift C

Slutligen skall vi lösa

$$y''' - y = e^x + \sin x.$$

Den homogena ekvationen

$$y''' - y = 0$$

har den karaktäristiska ekvationen

$$r^3 - 1 = 0$$

med de tre enhetsrötterna

$$r \in \left\{1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

[Du kommer väl ihåg grundkursen? Det är klart att *tredjegradsekvationen* $r^3 = 1$ har exakt *tre* komplexa rötter. Det är de tre tal i det komplexa talplanet som ger $1 + 0i$ om du höjer upp dem till tre. Det följer att samtliga måste ha belopp 1 (varför?) samt att deras argument måste ge en heltalsmultipel av 2π vid multiplikation av tre (varför?).]

Således har den homogena ekvationen den allmänna lösningen

$$y_H(x) = Ae^x + Be^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x} + Ce^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x}$$

som också kan skrivas på den ”reella” formen[2]

$$y_H(x) = Ae^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$$

för två andra konstanter C_1 och C_2. Nu återstår alltså bara att finna *en* lösning till den ursprungliga, inhomogena, ekvationen

$$y''' - y = e^x + \sin x.$$

Kom nu ihåg att det här är en *linjär* differentialekvation, d.v.s. om vi skriver den på formen $L(y) = f(x)$, med $L(y) = y''' - y$, så gäller att om y_1 löser ekvationen $L(y_1) = f_1(x)$ medan y_2 löser ekvationen $L(y_2) = f_2(x)$ så är $y = y_1 + y_2$ en lösning till $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$.

Det vi kan göra här, alltså, är att finna en lösning y_1 till $y''' - y = e^x$ samt *en annan* lösning $y_2$till $y''' - y = \sin x$, ty då kommer $y_P \coloneqq y_1 + y_2$ att vara en partikulärlösning till hela den ursprungliga ekvationen $y''' - y = e^x + \sin x$ [vilket är precis vad vi behöver, eller hur?].

Så, först tar vi oss an $y''' - y = e^x$. Här kan vi ansätta $y = ze^x$ vilket (efter lite räknande) ger $y''' = (z''' + 3z'' + 3z' + z)e^x$ så att ekvationen lyder

$$z''' + 3z'' + 3z' = 1$$

med den uppenbara lösningen

$$z(x) = \frac{x}{3}.$$

Alltså är

$$y_1 = \frac{x}{3}e^x$$

en lösning till

$$y''' - y = e^x.$$

[2] Använd definitionen av den komplexa exponentialfunktionen: $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b),\ a, b \in \mathbb{R}$.

Nu tar vi oss an

$$y''' - y = \sin x.$$

Vi ansätter, som vanligt, $y = A\sin x + B\cos x$. Lite räknande (som du nog kan nu) ger

$$y_2 = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x.$$

Alltså är

$$y_P(x) = y_1 + y_2 = \frac{x}{3}e^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

en partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen, som då har den allmänna lösningen

$$y(x) = y_H + y_P = Ae^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + \frac{x}{3}e^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x.$$

Egentligen ganska enkelt, när man väl kan det, men nog ser det bökigt ut om man ännu inte tagit till sig det…