

Uppgift E 7.17

Deluppgift a

Approximera $\cos \frac{1}{10}$ med ett fel om högst 10^{-2} .

Lösning: Maclaurin-utvecklingen av $\cos x$ av grad 1 med restterm i Lagranges form är

$$\cos x = 1 - \frac{\cos \theta x}{2!} x^2$$

för något $\theta \in [0, 1]$. Speciellt är alltså

$$\cos \frac{1}{10} \approx 1$$

med felet

$$\left| \cos \frac{1}{10} - 1 \right| = \left| \frac{\cos(\theta/10)}{2!} \cdot \frac{1}{100} \right| \leq \frac{1}{200} < 10^{-2}.$$

Svar: $\cos \frac{1}{10} \approx 1$ med fel $\leq 10^{-2}$.

Deluppgift b

Approximera $\cos 1$ med ett fel om högst 10^{-2} .

Lösning: Maclaurin-utvecklingen av $\cos x$ av grad 5 med restterm i Lagranges form är

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\cos \theta x}{6!} x^6$$

för något $\theta \in [0, 1]$. Speciellt är alltså

$$\cos 1 \approx 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} = \frac{13}{24}$$

med felet

$$\left| \cos 1 - \frac{13}{24} \right| = \left| \frac{\cos \theta}{6!} \right| \leq \frac{1}{6!} < 10^{-2}.$$

Svar: $\cos 1 \approx \frac{13}{24}$ med fel $\leq 10^{-2}$.