Uppgift E8.15

I den här uppgiften betraktar vi differentialekvationen

$$y' = \frac{1+y}{x^2+x}.$$

Deluppgift A

Vi skall bestämma den lösning som går igenom punkten $(-2, 1)$. Ekvationen är separabel, ty den är ekvivalent med

$$\frac{y'}{1+y} = \frac{1}{x^2+x}$$

med tanke på att $y \approx 1$ så $1 + y \approx 2 \neq 0$. En primitiv funktion till $(1+y)^{-1}$ med avseende på y är $\ln|1+y|$ och en primitiv funktion till $(x^2+x)^{-1}$ med avseende på x är $\ln|x| - \ln|x+1|$ (integranden är ju **rationell**, så bestämningen av primitiven sitter ju i ryggmärgen sedan förra kursen‼). Vår ekvation kan sålunda skrivas

$$\frac{d}{dx}\ln|1+y| = \frac{d}{dx}(\ln|x| - \ln|x+1|).$$

Vi drar slutsatsen att det finns en konstant $C \in \mathbb{R}$ sådan att

$$\ln|1+y| = \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

[om två funktioner har samma derivata måste de vara lika så när som på en konstant, d.v.s. så när som på en höjdförskjutning i grafen]. Eftersom $y \approx 1$ så är $1 + y \approx 2 > 0$ och eftersom $x \approx -2 < 0$ är $x + 1 \approx -1 < 0$ så hantering av beloppstecknen ger

$$\ln(1+y) = \ln(-x) - \ln(-x-1) + C = \ln\frac{x}{x+1} + C$$

så att

$$1 + y = e^{\ln\frac{x}{x+1}+C} = e^C e^{\ln\frac{x}{x+1}} = \frac{Dx}{x+1}$$

där den nya konstanten $D \coloneqq e^C (> 0)$. Slutligen får vi

$$y = \frac{Dx}{x+1} - 1.$$

Kravet $y(-2) = 1$ ger nu att $D = 1$ så att

$$y = \frac{x}{x+1} - 1 = \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = -\frac{1}{x+1}.$$

När vi hanterade beloppstecknen krävde vi att $x < 0$ och $x + 1 < 0$ vilket är ekvivalent med $x < -1$, som alltså är det intervall för vilket vår lösning gäller. (Det är också uppenbart i vår slutliga funktion att x inte kan bli så stor som -1.)

Deluppgift B

Vi skall nu i stället bestämma den lösning som går igenom punkten $(1, -1)$. Redan vårt första steg i förra lösningen är därmed otillåtet (division med noll!). I stället noterar vi att om $y(1) = -1$ så måste $y'(1) = 0$. I själva verket ser vi att den konstanta funktionen $y(x) = -1$ löser ekvationen. Detta är också den enda lösningen, och den gäller tydligen för alla $x > 0$; x kan inte bli så liten som 0, eftersom differentialekvationen inte kan vara uppfylld för $x = 0$.

Deluppgift C

Vi skall nu bestämma den lösning som går igenom punkten $(1, -2)$. Eftersom $y \approx -2$ är $1 + y \approx -1 \neq 0$ så att ekvationen är ekvivalent med

$$\frac{y'}{1+y} = \frac{1}{x^2+x}.$$

Som i a-uppgiften erhåller vi

$$\ln|1+y| = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$$

Nu är, som sagt, $1 + y \approx -1 < 0$ medan $x \approx 1 > 0$ och $x + 1 \approx 2 > 0$ så att hantering av beloppstecknen ger

$$\ln(-1-y) = \ln x - \ln(x+1) + C = \ln\frac{x}{x+1} + C.$$

Därför är

$$-1 - y = e^{\ln\frac{x}{x+1}+C} = \frac{Dx}{x+1}$$

och

$$y = -\frac{Dx}{x+1} - 1$$

där den nya konstanten $D \coloneqq e^C (> 0)$. Kravet $y(1) = -2$ ger $D = 2$ så att lösningen är

$$y = -\frac{2x}{x+1} - 1 = -\frac{2x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = -\frac{3x+1}{x+1}.$$

Under lösningens gång antog vi att $x > 0$ och $x + 1 > 0$ vilket är ekvivalent med $x > 0$, vilket också är det intervall för vilken lösningen (säkert) gäller.

Deluppgift D

Slutligen bestämmer vi den lösning som går igenom punkten $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Som tidigare får vi

$$\ln|1+y| = \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

och hantering av beloppstecknen ger

$$\ln(1+y) = \ln(-x) - \ln(x+1) + C = \ln\left(-\frac{x}{x+1}\right) + C$$

med tanke på att $1 + y \approx 1 > 0$, $x \approx -\frac{1}{2} < 0$ och $x + 1 \approx \frac{1}{2} > 0$. Vi får då

$$1 + y = e^{\ln\left(-\frac{x}{x+1}\right)+C} = -\frac{Dx}{x+1}$$

där den nya konstanten $D := e^C (> 0)$. Sålunda

$$y = -\frac{Dx}{x+1} - 1$$

varefter kravet $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ger att $D = 1$. Lösningen är därför

$$y = -\frac{x}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = -\frac{2x+1}{x+1}.$$

Under lösningens gång antog vi att $x < 0$ och $x + 1 > 0$ vilket är ekvivalent med $x \in \left]-1, 0\right[$, och det är därför på detta intervall som lösningen (med säkerhet) gäller.