

Uppgift N 13g

Vi skall avgöra huruvida serien

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}. \quad (1)$$

är konvergent eller ej.

Lösning: Notera att integranden är kontinuerlig, positiv och avtagande, och dessutom är trivial att integrera! Det är alltså mycket lämpligt att jämföra serien med den generaliserade integralen

$$\int_4^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}. \quad (2)$$

Serien (1) är ju konvergent om och endast om den motsvarande generaliserade integralen (2) är konvergent (enligt sats N.9). Men

$$\int_4^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_4^b \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{\ln x} \right]_4^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 4} \right) = \frac{1}{\ln 4}.$$

Den generaliserade integralen (2) är sålunda konvergent, och därför är serien (1) också konvergent.