Uppgift N12

Vi betraktar serien

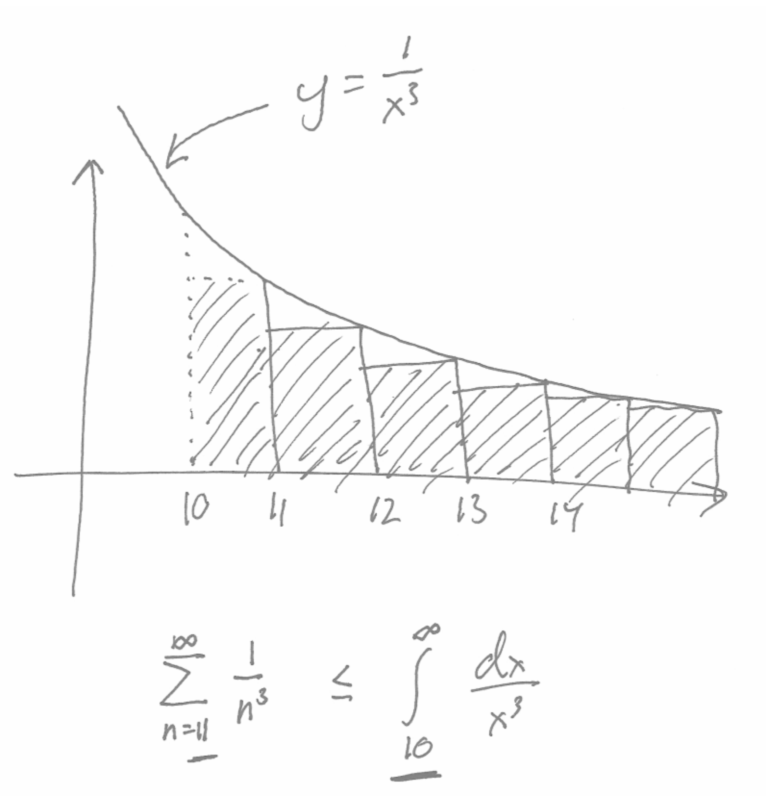
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Eftersom termerna $a_n = \frac{1}{n^3}$ avtar snabbt emot noll, misstänker vi att vi får en bra approximation av summan genom att bara ta med de tio första termerna. Vi vill bestämma en övre gräns för felet.

Felet är så klart avståndet mellan det riktiga värdet och approximationen, d.v.s.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^3} \right| = \left| \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^3} \right| = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} - \sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^n}{n^3} = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$. Vi ser i bilden nedan att vi kan överskatta den sista summan med en integral *från 10 till oändligheten*.



Således

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^3} \right| = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{10}^{\infty} = \frac{1}{2 \cdot 10^2} = \frac{1}{200}.$$

Alltså är felet inte större än $\frac{1}{200}$ om vi approximerar serien med de tio första termerna.

Uppgift N18

Vi be traktar nu serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$$

i stället. Även här vill vi approximera serien med de tio första termerna, och vi vill bestämma en övre gräns på felet. Notera att

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} - \sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^n}{n^3}\right| = \left|\sum_{n=11}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\right| \leq \sum_{n=11}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

så vi ser att felet även här inte kan vara större än $\frac{1}{200}$. Men eftersom termerna alternerar (växlar tecken: $-, +, -, +, \ldots$) så misstänker vi att felet blir *ännu* mindre i det här fallet, och vi önskar bestämma en bättre (d.v.s. mindre) överskattning av felet. Till vår hjälp har vi sats N.21. Eftersom

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| \searrow 0$$

och a_n är alternerande, är serien en *Leibnizserie*, och sats N.21 är tillämpbar. Den säger direkt att

$$|s - s_{10}| \leq |a_{11}| = \left|\frac{(-1)^{11}}{11^3}\right| = \frac{1}{11^3} = \frac{1}{1\,331}.$$

Alltså är felet mindre än $\frac{1}{1\,331}$.

B-uppgifterna

I både N12 och N18 frågas också hur många termer som skall tas med för att felet skall bli mindre än ett visst tal. Dessa två frågor besvaras enkelt genom att pröva sig fram. I N18, t.ex., undrar vi hur många termer n vi behöver ta med för att felet

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}| = \left|\frac{(-1)^{(n+1)}}{(n+1)^3}\right| = \frac{1}{(n+1)^3} < 10^{-6}.$$

Om vi sätter $m \coloneqq n + 1$ har vi alltså

$$\frac{1}{m^3} < \frac{1}{10^6}.$$

Uppenbarligen gäller likhet för $m = 10^2 = 100$, d.v.s. för $n = 99$ termer. Tar vi alltså med en term till, d.v.s. 100 termer, blir felet *mindre* än 10^{-6}.