Uppgift P15

Vi skall lösa differentialekvationen

$$(1-4x^2)y''-y=0, \qquad \begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

genom att ansätta en potensserie

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Vi finner direkt

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \qquad y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

så att ekvationen kan skrivas

$$(1-4x^2)y''-y=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}-4\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=0.$$

Vi vill skriva detta på formen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n' x^n=0$, d.v.s. vi behöver göra något åt den otäcka x^{n-2}-faktorn i den första summan. För att åstadkomma detta, noterar vi att den första termen kan skrivas

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

eftersom de två första termerna i serien ändå är noll (varför?). Betrakta nu den *första* termen i HL ovan, nämligen den som svarar mot $n=2$. Här står det x upphöjt till $n-2=0$. Så vi kan lika gärna byta ut x^{n-2} mot x^n om vi börjar med $n=0$ i stället för $n=2$. Men då måste vi skriva $n+2$ i stället för n samt $n+1$ i stället för $n-1$. Alltså är

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n.$$

Vår differentialekvation kan sålunda skrivas

$$(1-4x^2)y''-y=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n-4\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2}-4n(n-1)c_n-c_n]x^n=0.$$

Men högerledet är ju bara noll-potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n$. Om två potensserier är lika, måste varje koefficient vara lika. Således

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - 4n(n-1)c_n - c_n = 0$$

som ger

$$c_{n+2} = \frac{4n(n-1)+1}{(n+1)(n+2)}c_n$$

och vi har därmed funnit vår rekursionsformel för koefficienterna i potensserien för $y(x)$. Från

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{och} \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

ser vi direkt att begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$ kräver att

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 0. \end{cases}$$

Men $c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow c_5 = 0 \Rightarrow \cdots$ enligt rekursionformeln, så vi har tydligen att göra med en *jämn* funktion. Vad beträffar de jämna koefficienterna finner vi enkelt

$$c_0 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_4 = \frac{3}{8} \Rightarrow c_6 = \frac{49}{80} \Rightarrow c_8 = \frac{847}{640} \Rightarrow \cdots$$

så i princip har vi alltså löst differentialekvationen – vi kan få fram hur många termer vi vill. Däremot räcker inte det för att lösa uppgiften. Vi måste ta fram en sluten form $c_n = f(n)$ för alla jämna n, bland annat för att bekräfta den formel som står i facit, men också för att kunna räkna ut konvergensradien.

Så: vi börjar med att stirra riktigt länge på talföljden c_0, c_2, c_4, c_6, c_8 ovan. Vad är c_n? Det är väldigt svår att säga (tycker jag). Problemet är att vi har *förenklat* koefficienterna i följden. Vi kan faktiskt urskilja ett mönster om vi räknar ut talen ovan *utan att förenkla dem*. Så, låt oss pröva det.

$$c_0 = \frac{1}{1} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2\cdot 1} \Rightarrow c_4 = \frac{9}{4\cdot 3}\cdot\frac{1}{2\cdot 1} \Rightarrow c_6 = \frac{49}{6\cdot 5}\cdot\frac{9}{4\cdot 3}\cdot\frac{1}{2\cdot 1} \Rightarrow c_8 = \frac{121}{8\cdot 7}\cdot\frac{49}{6\cdot 5}\cdot\frac{9}{4\cdot 3}\cdot\frac{1}{2\cdot 1} \Rightarrow \Rightarrow \cdots$$

Vi ser nu att nämnaren är $n!$ och täljaren är tydligen produkten av kvadrater 3^2, 7^2, 11^2 av heltal fyra steg ifrån varandra. Alltså är[1]

$$c_{2n} = \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot \ldots \cdot (4n-5)^2}{(2n)!}, \qquad n \geq 0.$$

Därför

[1] Om ni så vill kan ni skriva "$n \geq 2$" i stället [vi känner ju redan de två första termerna i serien]. Men formeln gäller också för $n = 0$ och $n = 1$. Noter att täljaren då består av noll faktorer, den så kallade "tomma produkten", vilken definieras som 1. (Jämför med $0! = 1$.)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot \ldots \cdot (4n-5)^2}{(2n)!} x^{2n} = $$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{49}{80}x^6 + \frac{847}{640}x^8 + \cdots.$$

Vad är konvergensradien? Kvottestet ger

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot \ldots \cdot (4n-5)^2 \cdot (4n-1)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot \ldots \cdot (4n-5)^2} \cdot \frac{1}{x^{2n}} =$$
$$= \frac{(4n-1)^2}{(2n+2)(2n+1)} x^2.$$

Notera att täljaren beter sig som $16n^2$ för stora n, medan nämnaren beter sig som $4n^2$. Således[2]

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 4x^2.$$

Nu är $|4x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$, så konvergensradien $R = \frac{1}{2}$. Därmed är vi klara.

[2] Ni vet hur vi gör detta formellt: utveckla täljaren och nämnaren och bryt ut det som dominerar.