Uppgift P7.18

Vi har som bekant

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5$$

för något ξ mellan 0 och x (som beror på x). Det följer att

$$\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = \frac{\cos\xi}{120}x^5. \tag{*}$$

Speciellt är felet

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| = \left|\frac{\cos\xi}{120}x^5\right| \leq \frac{|x|^5}{120}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. Om vi dessutom vet att $x \in [0, \pi/3]$ så är också $\xi \in [0, \pi/3]$ så att $\cos\xi \in [1/2\,, 1]$. Följaktligen ger (*) att

$$\frac{1}{240}x^5 \leq \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \leq \frac{1}{120}x^5$$

då $x \in [0, \pi/3]$. Om vi i stället vet att $x \in [-\pi/3\,, 0]$ så är också $\xi \in [-\pi/3\,, 0]$ varför $\cos\xi \in [1/2\,, 1]$ (igen). I det här fallet ger däremot (*) att

$$\frac{1}{120}x^5 \leq \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \leq \frac{1}{240}x^5$$

eftersom $x \leq 0$ [t.ex. är ju $-\frac{1}{120} < -\frac{1}{240}$].

Division av (*) med x ger

$$\frac{\sin x}{x} - \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) = \frac{\cos\xi}{120}x^4$$

för något ξ mellan 0 och x. Speciellt är felet

$$\left|\frac{\sin x}{x} - \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)\right| = \left|\frac{\cos\xi}{120}x^4\right| \leq \frac{x^4}{120}$$

för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.