Den cylindriska helixen

Som bekant kan enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ i planet $\mathbb{R}^2$ parametriseras

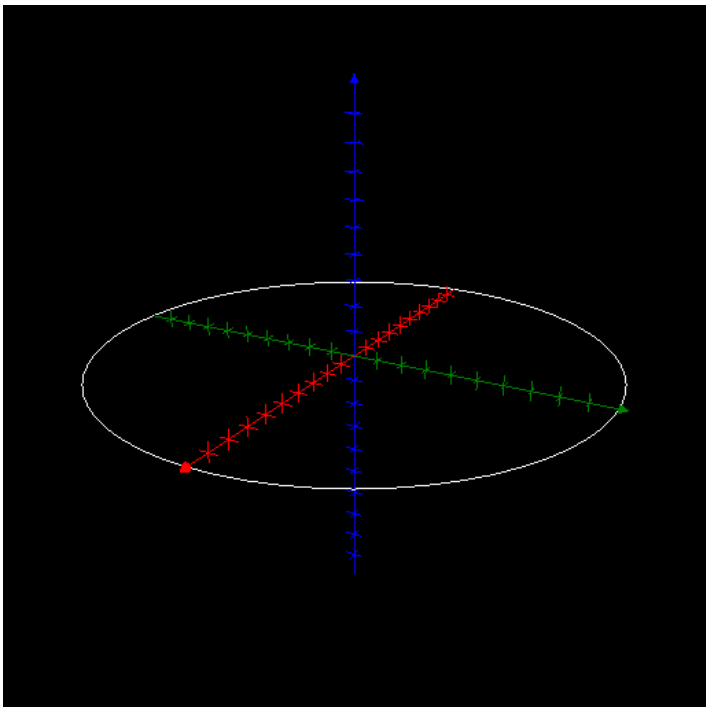
$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},$$

d.v.s. genom $\big(x(t), y(t)\big) = (\cos t\,, \sin t)$. Det betyder att enhetscirkeln är *värdemängden* $V_{\mathbf{r}}$ till funktionen $\mathbf{r}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, d.v.s. mängden av punkter som man får ut när t antar alla möjliga värden.

Vi kan också rita en cirkel någonstans i *rummet* $\mathbb{R}^3$. Till exempel är

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix}$$

enhetscirkeln i xy-planet ($z = 0$) i rummet (axelskalan är 0.1):



Till exempel ger ju $t = 0$ punkten $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$ medan $t = \pi/4$ ger punkten $\mathbf{r}(\pi/4) = \big(1/\sqrt{2}\,, 1/\sqrt{2}\,, 0\big)$ och $t = \pi/2$ ger punkten $\mathbf{r}(\pi/2) = (0, 1, 0)$. Det är alltså klart att vi får enhetscirkeln i xy-planet. Vi kan också notera att en godtycklig punkt $\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = (\cos t\,, \sin t\,, 0)$ uppfyller de två ekvationerna $x^2 + y^2 = 1$ (en cylinder kring z-axeln!) samt $z = 0$ (xy-planet!) och snittet mellan dessa två ytor är ju just enhetscirkeln i xy-planet!

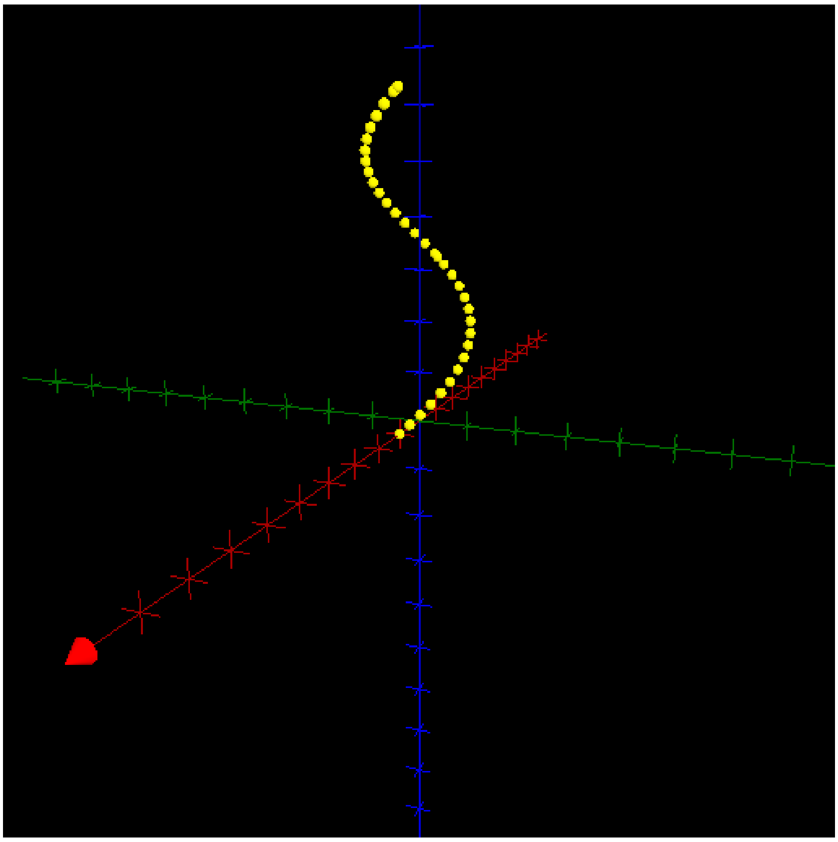
Lite roligare blir det om vi betraktar

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\end{pmatrix}$$

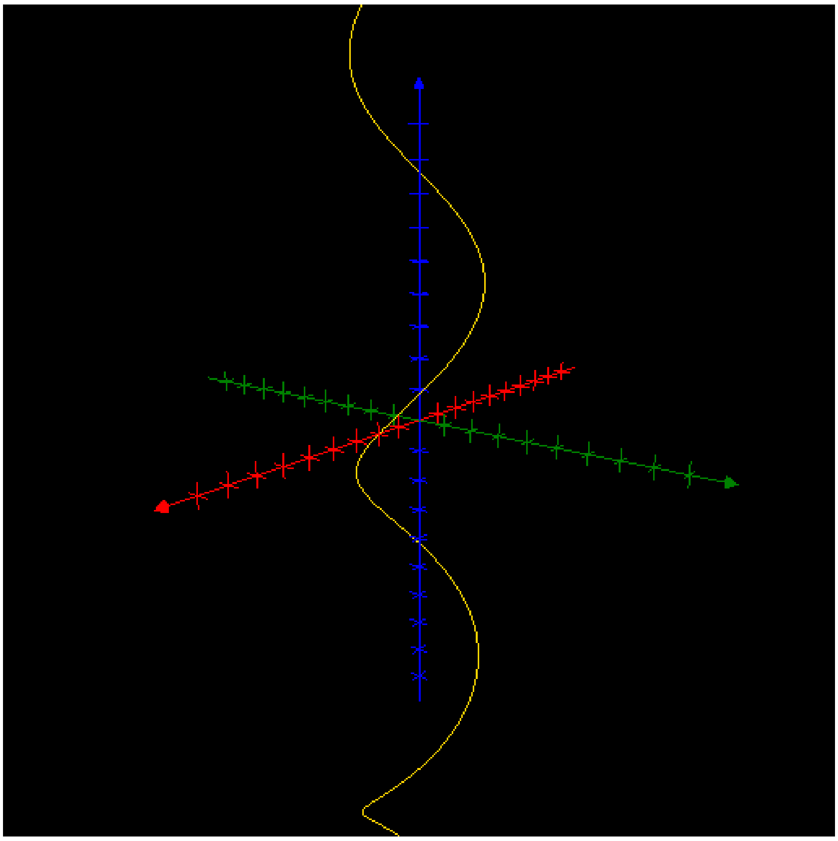
som är en cylindrisk helix (spiral). Återigen ser vi att en godtycklig punkt $\mathbf{r}(t)$ uppfyller $x^2 + y^2 = 1$ så kurvan är även nu en delmängd av denna cylinder. Men nu är $z = t$, d.v.s. z ökar med parametern. Samtidigt som x- och y-koordinaterna utför sin cirkelrörelse, så flyttar vi oss alltså längre upp på cylindern. Vi kan pröva att räkna ut några punkter på kurvan:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)\\
&\mathbf{r}(0.2) = (0.980066577841, 0.198669330795, 0.2)\\
&\mathbf{r}(0.4) = (0.921060994003, 0.389418342309, 0.4)\\
&\mathbf{r}(0.6) = (0.82533561491, 0.564642473395, 0.6)\\
&\mathbf{r}(0.8) = (0.696706709347, 0.7173560909, 0.8)\\
&\mathbf{r}(1.0) = (0.540302305868, 0.841470984808, 1)\\
&\mathbf{r}(1.2) = (0.362357754477, 0.932039085967, 1.2)\\
&\mathbf{r}(1.4) = (0.1699671429, 0.985449729988, 1.4)\\
&\mathbf{r}(1.6) = (-0.0291995223013, 0.999573603042, 1.6)\\
&\mathbf{r}(1.8) = (-0.227202094693, 0.973847630878, 1.8)\\
&\mathbf{r}(2.0) = (-0.416146836547, 0.909297426826, 2)\\
&\mathbf{r}(2.2) = (-0.588501117255, 0.80849640382, 2.2)\\
&\mathbf{r}(2.4) = (-0.737393715541, 0.675463180551, 2.4)\\
&\mathbf{r}(2.6) = (-0.856888753369, 0.515501371821, 2.6)\\
&\mathbf{r}(2.8) = (-0.942222340669, 0.334988150156, 2.8)\\
&\mathbf{r}(3.0) = (-0.9899924966, 0.14112000806, 3)\\
&\mathbf{r}(\pi) = (-1, 0, 3.14159265359)\\
&\mathbf{r}(3.2) = (-0.998294775795, -0.0583741434276, 3.2)\\
&\mathbf{r}(3.4) = (-0.966798192579, -0.255541102027, 3.4)\\
&\mathbf{r}(3.6) = (-0.896758416334, -0.442520443295, 3.6)\\
&\mathbf{r}(3.8) = (-0.790967711914, -0.611857890943, 3.8)\\
&\mathbf{r}(4.0) = (-0.653643620864, -0.756802495308, 4)\\
&\mathbf{r}(4.2) = (-0.490260821341, -0.871575772414, 4.2)\\
&\mathbf{r}(4.4) = (-0.307332869978, -0.95160207389, 4.4)\\
&\mathbf{r}(4.6) = (-0.112152526935, -0.993691003633, 4.6)\\
&\mathbf{r}(4.8) = (0.0874989834394, -0.996164608836, 4.8)\\
&\mathbf{r}(5.0) = (0.283662185463, -0.958924274663, 5)\\
&\mathbf{r}(5.2) = (0.4685166713, -0.88345465572, 5.2)\\
&\mathbf{r}(5.4) = (0.634692875943, -0.772764487556, 5.4)\\
&\mathbf{r}(5.6) = (0.77556587851, -0.631266637872, 5.6)\\
&\mathbf{r}(5.8) = (0.885519516941, -0.464602179414, 5.8)\\
&\mathbf{r}(6.0) = (0.96017028665, -0.279415498199, 6)\\
&\mathbf{r}(6.2) = (0.996542097023, -0.0830894028175, 6.2)\\
&\mathbf{r}(2\pi) = (1, 0, 6.28318530718)
\end{aligned}$$

Vi kan markera dessa punkter i rummet (axelskalan är 0.5):



Visst blir det en spiral! Om vi i stället låter datorn rita upp *hela* kurvan (d.v.s. den oändligt stora mängd av punkter man får ut när t antar alla reella tal) får vi följande bild:

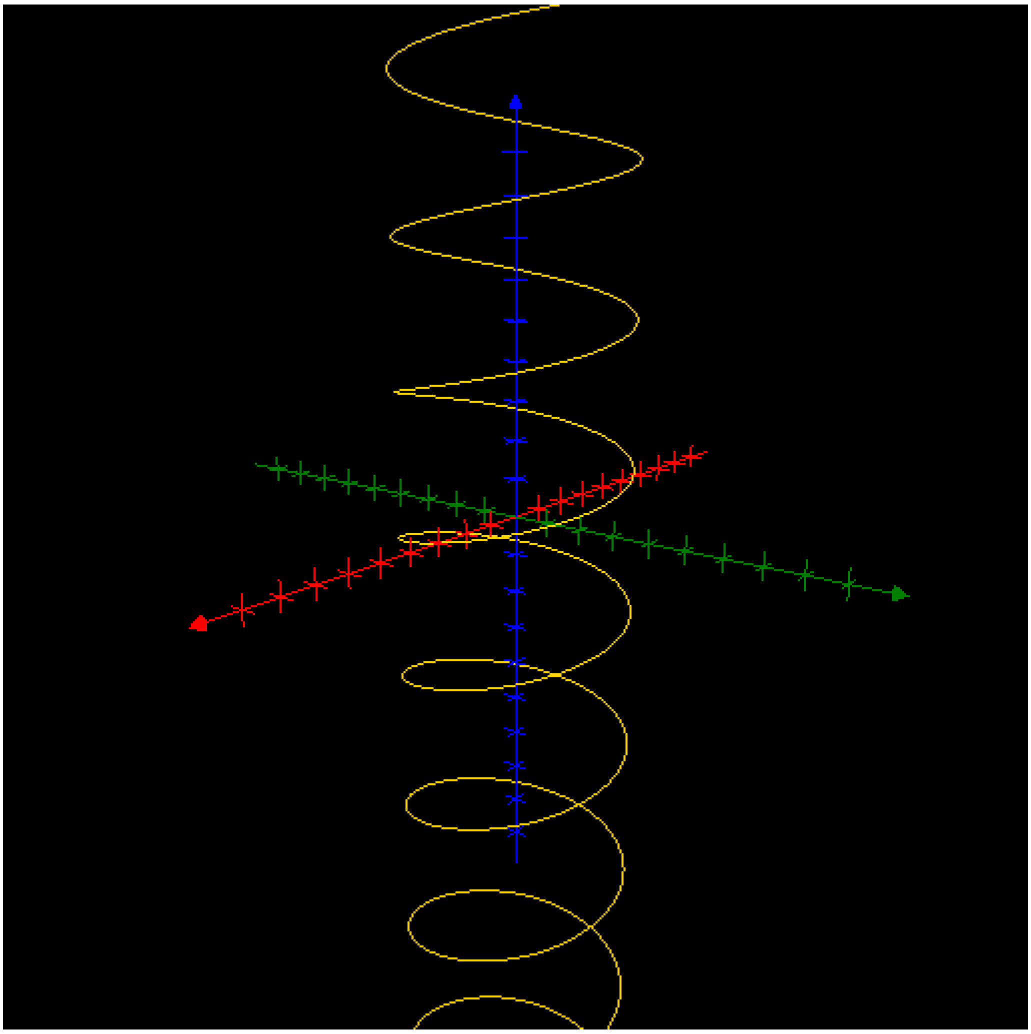


Spiralen är väldigt utdragen. Man får en vackrare bild om man ”trycker ihop” den längs z-axeln med en enkel skalning.

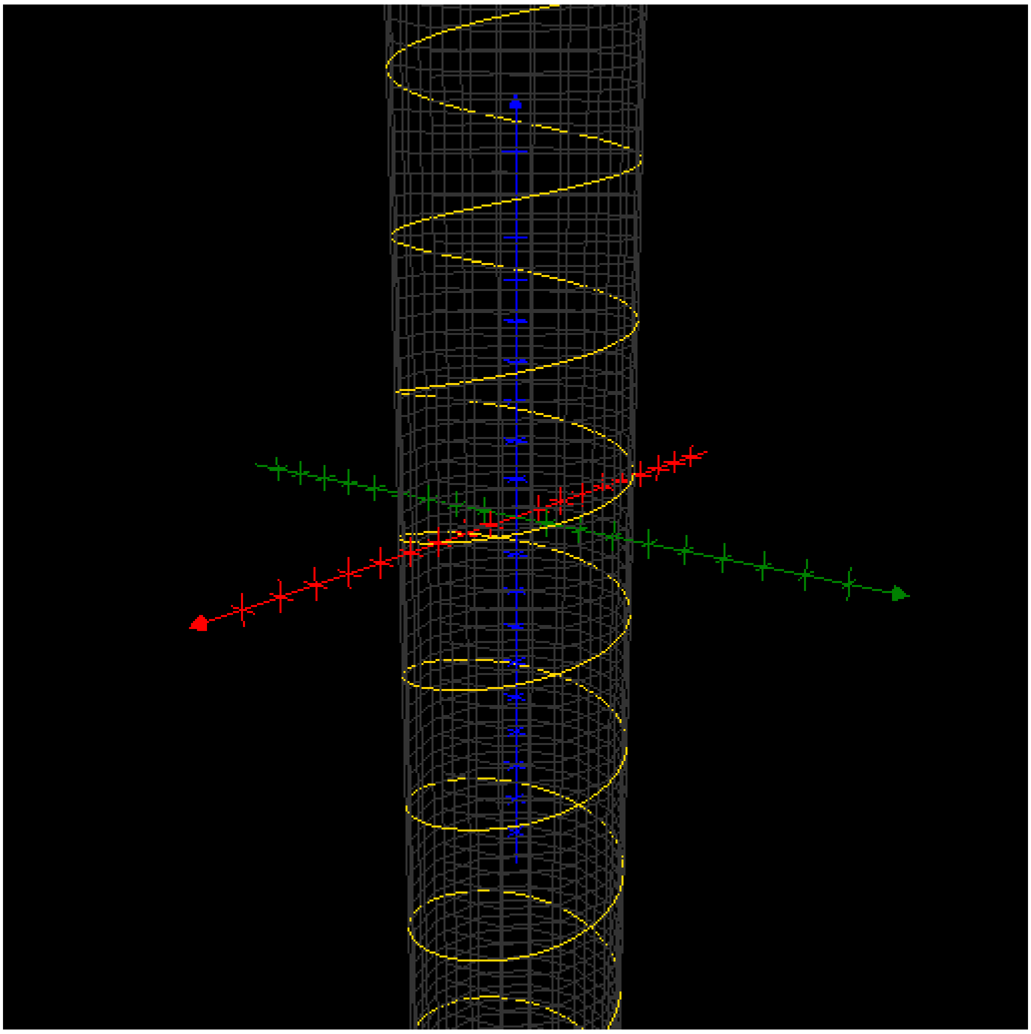
Parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ t/5 \end{pmatrix}$$

ger följande bild (axelskalan 1.0):



som är hur man brukar föreställa sig en cylindrisk helix. Notera att kurvan uppenbarligen är en delmängd av cylinderytan $x^2 + y^2 = \sqrt{3}$. I bilden nedan visas det extra tydligt.



På http://privat.rejbrand.se/cylhelix.exe kan du ladda ner ett minimalt Windows-program i vilket du kan undersöka den cylindriska helixen i en äkta 3D-miljö. Du använder musen till att rotera och mushjulet till att zomma.