# Optimering på obegränsat område

Bestäm största och minsta värde (om de existerar) av skalärfältet $f$, definierat av

$$f(x,y) = (x - 2y)e^{-x}$$

på området $D = \mathbb{R} \times [0,1]$ $(= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\})$.

*Lösning:* Låt oss först finna alla lokala maxima och minima till skalärfältet $f$ på hela planet $\mathbb{R}^2$, d.v.s. alla "äkta" bergstoppar- och dalar till $f$ (oberoende av vår artificiella avhuggning av planet där $y = \pm 1$). I en sådan punkt är gradienten till skalärfältet noll. I vårt fall är gradienten

$$\nabla f(x,y) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} (1 - x + 2y)e^{-x} \\ -2e^{-x} \end{pmatrix}$$

som aldrig kan bli lika med nollvektorn, eftersom $-2e^{-x} \neq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Låt oss då undersöka funktionsvärden på randen, där vi hugger av området. Låt oss börja med den övre randen $\mathbb{R} \times \{1\}$ $(= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\})$. Här är funktionsvärdet

$$g(x) \coloneqq f(x,1) = (x - 2)e^{-x}.$$

Derivatan är

$$g'(x) = (3 - x)e^{-x}$$

som är noll precis då $x = 3$. (Notera att $x = 3$ tillhör randen. Notera också att derivatan är positiv då $x < 3$ och negativ då $x > 3$, så punkten $x = 3$ är ett lokalt maximum av $g$, d.v.s. ett lokalt maximum av $f$:s restriktion till övre randen. Om vi tolkar $f(x,y)$ som höjden över havet i punkten $(x,y)$ så är ju övre randen en cykelväg med höjdprofil $g(x)$ och punkten $x = 3$ följaktligen en lokal topp.) Värdet här är $g(3) = f(3,1) = e^{-3}$.

Nu undersöker vi den undre randen $\mathbb{R} \times \{0\}$ $(= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\})$. Här är funktionsvärdet

$$h(x) \coloneqq f(x,0) = xe^{-x}.$$

Derivatan är

$$h'(x) = (1 - x)e^{-x}$$

som är noll precis då $x = 1$. (Notera att $x = 1$ tillhör randen. Här rör det sig också om ett lokalt maximum på randen, d.v.s. ett lokalt maximum för $f$:s restriktion till randen.) Värdet här är $h(1) = f(1,0) = e^{-1}$, som är ännu större än $e^{-3}$.

Tyvärr är ju området $D$ obegränsat, så vi måste på något sätt undersöka skalärfältets ($f$:s) uppförande när vi går länge och längre ifrån origo (i allmänhet på alla möjliga sätt – i vårt fall åt vänster samt höger i remsan). Det är lyckligtvis tämligen enkelt. Vi har ju

$$(x - 2)e^{-x} \leq f(x,y) \leq xe^{-x}, \qquad \forall y \in [0,1].$$

Tydligen gäller, oberoende av $y$, att $f(x,y) \to 0$ då $x \to \infty$ och $f(x,y) \to -\infty$ då $x \to -\infty$ (motivera det!). Det är alltså uppenbart att minsta värde saknas hos $f$ på $D$ – vi kan erhålla precis hur stora negativa värden som helst, bara vi går tillräckligt långt åt vänster. Däremot kommer vi närmare och närmare noll ju längre åt höger vi går. Slutsatsen är att det största värde vi kan uppmäta förekommer i punkten $(1,0)$ och är $e^{-1}$.

*Svar:* Minsta värde saknas (och infimum är $-\infty$); största värde är $e^{-1}$ och antages i $(1,0)$.

## Metod 2

En kanske något snabbare lösningsmetod är som följer. Notera först att $f(x,y) \to -\infty$ då $x \to -\infty$ (oberoende av $y$). Minsta värde saknas sålunda (infimum är $-\infty$). För att finna största värdet, kan vi fixera någon horisontell linje $y = c$, och finna största värde på *just den linjen* (högsta höjden på *just den* horisontella cykelbanan). Vi får då höjdprofilen

$$g_c(x) = (x - 2c)e^{-x},$$

d.v.s. $g_c(x)$ är höjden över havet på position $x \in \mathbb{R}$ på den horisontella cykelbanan med ”index” $c$. Största höjden på *den* banan fås med vanlig derivering:

$$g_c'(x) = (1 - x + 2c)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 + 2c.$$

[Notera att det verkligen är maximum, för $g_c(x) \to 0$ då $x \to \infty$ och $g_c(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$.] Högsta höjden på cykelbana ”index c” är alltså $g_c(1 + 2c) = (1 + 2c - 2c)e^{-(1+2c)} = e^{-1-2c}$ och antages vid positionen $x = 1 + 2c$. Låt oss nu jämföra alla dessa högsta punkter när cykelbaneindexet $c$ varierar. Vi har ju en funktion

$$\text{Topphöjd}(c) = e^{-1-2c}$$

som tar in cykelbanenumret $c \in [0,1]$ och ger ifrån sig högsta höjden på den banan. Det är klart att den högsta topphöjden (för alla banor!) är den som hör till cykelbanan med index $c = 0$ och är $\text{Topphöjd}(0) = e^{-1}$.

[Hade funktionen $c \mapsto \text{Topphöjd}(c)$ varit mer invecklad hade vi förstås deriverat den (med avseende på $c$) och satt derivatan lika med noll och undersökt randpunkterna $c \in \{0,1\}$ separat.]

*Svar:* Minsta värde saknas (och infimum är $-\infty$); största värde är $e^{-1}$ och antages i $(1, 0)$.