Uppgift 1.21c

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2y^3}{2x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^3\cos^3\varphi - 2r^3\sin^3\varphi}{2r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[r\cdot\frac{\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi}{2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\right]$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[r\cdot\frac{\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\right] = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[r\cdot\frac{\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi + 1}\right] = 0$$

eftersom $r \to 0$ medan faktorn

$$\frac{\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi + 1}$$

uppenbarligen är begränsad i en omgivning av origo:

$$\left|\frac{\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi + 1}\right| \le \frac{3}{1} = 3.$$

[Överkurs: Således, välj ett $\epsilon > 0$ och sätt $\delta \coloneqq \epsilon/3$. Då gäller

$$r < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{x^3-2y^3}{2x^2+y^2} - 0\right| = \left|r\cdot\frac{\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi + 1}\right| < \delta\cdot 3 = \frac{\epsilon}{3}\cdot 3 = \epsilon$$

vilket visar att uttrycket går mot 0 då r går mot 0.]