Uppgift 1.23

Deluppgift A

Vi skall undersöka

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{x^2+2y^2-2x+1}.$$

Det är klart, att *om* gränsvärdet existerar, så är det lika med noll, ty längs (den horisontella) linjen $y=0$ är funktionen identiskt lika med noll. Detsamma gäller längs den (vertikala) linjen $x=1$. Men längs den räta linjen $y=x-1$, som ju också går genom punkten $(1,0)$, är funktionen

$$\frac{xy-y}{x^2+2y^2-2x+1} = \frac{x(x-1)-(x-1)}{x^2+2(x-1)^2-2x+1} = \frac{x^2-x-x+1}{x^2+2x^2-4x+2-2x+1} = \frac{x^2-2x+1}{3x^2-6x+3} = \frac{1}{3}$$

överallt. Sålunda närmar vi oss olika värden på $f(x,y)$ när vi närmar oss punkten $(1,0)$ beroende på vilken kurva vi går längs, och därför existerar inte gränsvärdet.

Deluppgift B

Nu har vi i stället

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy^2-y^2}{x^2+2y^2-2x+1}.$$

Här är det svårt att finna en kurva längs vilken vi *inte* närmar oss noll. För att förenkla analysen gör vi variabelbytet $t=x-1$ så att vi närmar oss origo i (t,y)-planet. Vi erhåller då

$$\frac{xy^2-y^2}{x^2+2y^2-2x+1} = \frac{(t+1)y^2-y^2}{(t+1)^2+2y^2-2(t+1)+1} = \frac{ty^2}{t^2+2y^2} = t\cdot\frac{1}{2+\left(\frac{t}{y}\right)^2}.$$

Det är klart att $\left(\frac{t}{y}\right)^2 \geq 0$ så $2+\left(\frac{t}{y}\right)^2 \geq 2$ och då är $\frac{1}{2+\left(\frac{t}{y}\right)^2} \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$, d.v.s. något högst ändligt.

Samtidigt går $t\to 0$, så

$$t\cdot\frac{1}{2+\left(\frac{t}{y}\right)^2} \to 0$$

då $(t,y)\to(0,0)$ och vi är klara.