Uppgift 2.17

Vi skall visa, direkt från definitionen av begreppet *differentierbarhet*, att funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definierad av $f(x,y) = xy$ är differentierbar i punkten $\mathbf{a} = (1,2)$.

Bevis. Definitionen av begreppet *differentierbarhet* finns t.ex. på sidan 53 i Persson–Böiers. Vi skall visa att det finns tal A_1 och A_2 samt en funktion $\varrho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sådan att (8) gäller och $\varrho(\mathbf{h}) \to 0$ då $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Vi väljer då förstås

$$A_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(1,2)} = y|_{(x,y)=(1,2)} = 2$$
$$A_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(1,2)} = x|_{(x,y)=(1,2)} = 1$$

vilket är de enda möjliga valen enligt Sats 2 på sidan 54 (och det är också intuitivt klart av (8)). Vi får alltså, med $\mathbf{h} = (h,k)$,

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = 2h + k + \sqrt{h^2+k^2}\,\varrho(h,k).$$

Vi behöver visa att ϱ uppfyller kravet i definitionen av differentierbarhet, d.v.s. att $\varrho(\mathbf{h}) \to 0$ då $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Men vi har ju

$$\begin{aligned}\varrho(h,k) &= \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - 2h - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{f(1+h,2+k) - f(1,2) - 2h - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\ &= \frac{(1+h)(2+k) - 2 - 2h - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \begin{bmatrix} h = \rho\cos\varphi \\ k = \rho\sin\varphi \end{bmatrix} = \frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho} = \\ &= \rho\cos\varphi\sin\varphi \to 0\end{aligned}$$

då $\rho \to 0$, d.v.s. då $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Beviset är klart. ■