Uppgift 2.31

Antag att $z\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är ett skalärfält i planet, med koordinater u och v, och att u och v i sin tur är funktioner av t. Vi kan tolka detta som att $z(u, v)$ är temperaturen i punkten (u, v) i planet och att vi går på en upptäcksfärd och är i punkten $\big(u(t), v(t)\big)$ vid tidpunkten t. Sammansättningen $z\big(u(t), v(t)\big)$ ger då temperaturen klockan t på vår färd. [Ja, jag vet att variabeln t kallas x i uppgiftshäftet, men det är ett onaturligt val av variabelnamn i det här sammanhanget.]

Vi vet nu att

$$u(t) = \ln t$$
$$v(t) = t^2.$$

Vi kan då uttrycka dz/dt och d^2z/dt^2 på följande sätt:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{t}\frac{\partial z}{\partial u} + 2t\frac{\partial z}{\partial v}$$

och

$$\begin{aligned}
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial z}{\partial u} + 2t\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \frac{d}{dt}\left(2t\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \\
&= \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) + 2t\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{d}{dt}(2t) = \\
&= \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{1}{t^2}\frac{\partial z}{\partial u} + 2t\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) + 2\frac{\partial z}{\partial v} = \\
&= \frac{1}{t}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{dv}{dt}\right] - \frac{1}{t^2}\frac{\partial z}{\partial u} + 2t\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\right] + 2\frac{\partial z}{\partial v} = \\
&= \frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2t\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right] - \frac{1}{t^2}\frac{\partial z}{\partial u} + 2t\left[\frac{1}{t}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2t\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right] + 2\frac{\partial z}{\partial v} = \\
&= \frac{1}{t^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{1}{t^2}\frac{\partial z}{\partial u} + 4t^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2\frac{\partial z}{\partial v}.
\end{aligned}$$