Uppgift 2.32

Vi betraktar differentialekvationen

$$z''_{xx} - 4z''_{xy} + 4z''_{yy} = 6y$$

där z åtminstone är av klass $C^2(\mathbb{R}^2)$. Vi får tipset att variabelbytet (koordinatbytet)

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = x \end{cases}$$

med inversen

$$\begin{cases} x = v \\ y = u - 2v \end{cases}$$

är lämpligt. Vi ämnar därför skriva om ekvationen i de nya koordinaterna i planet.

Vi har

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

och

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Vidare är

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(2\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(2\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(2\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) = 2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \quad \text{samt}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

Därför lyder ekvationen

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 8\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 6(u - 2v),$$

d.v.s.

$$z''_{vv} = 6u - 12v.$$

Detta medför

$$z'_v = 6uv - 6v^2 + f(u) \Rightarrow z = 3uv^2 - 2v^3 + f(u)v + g(u)$$

som i ursprungliga koordinaterna lyder

$$z(x, y) = 4x^3 + 3x^2y + f(2x + y)x + g(2x + y)$$

för något par av funktioner f och $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nu ges vi randvillkoret

$$z(0, y) = e^{-y^2}.$$

Eftersom vår allmänna lösning ger

$$z(0, y) = g(y)$$

har vi alltså bestämt

$$g(t) = e^{-t^2}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

och därmed är

$$z(x, y) = 4x^3 + 3x^2 y + f(2x + y)x + e^{-(2x+y)^2}.$$

Derivering med avseende på x ger

$$z'_x(x, y) = 12x^2 + 6xy + 2f'(2x + y)x + f(2x + y) + e^{-(2x+y)^2} \cdot (-2)(2x + y) \cdot 2$$

så att

$$z'_x(0, y) = f(y) - 4ye^{-y^2}.$$

Men vi ges nu randvillkoret

$$z'_x(0, y) = 0$$

så tydligen måste

$$f(t) = 4te^{-t^2}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

och därmed är vår allmänna lösning

$$z(x, y) = 4x^3 + 3x^2 y + 4(2x + y)e^{-(2x+y)^2} x + e^{-(2x+y)^2}.$$