Uppgift 2.44

Bestäm ekvationer för tangenten och normalen (d.v.s. två *linjer*) till kurvan $x^3 + xy + y^3 = 5$ i punkten $(2, -1)$.

Lösning: Vi noterar först att punkten verkligen *ligger* på kurvan. Om vi inför skalärfältet $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definierat av

$$F(x, y) \coloneqq x^3 + xy + y^3$$

så är den givna kurvan inget annat än nivåkurvan $F(x, y) = 5$ till F. Till skalärfältet F hör vektorfältet

$$\nabla F(x, y) = (3x^2 + y, x + 3y^2).$$

Eftersom vektorn $\nabla F(x, y)$ i varje punkt är vinkelrät mot den nivåkurva till F som passerar genom punkten är det klart att den sökta normalen har en riktningsvektor

$$\mathbf{n} \coloneqq \nabla F(2, -1) = (11, 5).$$

Ekvationen för *tangenten* är därför

$$11x + 5y = d_1$$

för något $d \in \mathbb{R}$. Eftersom $(2, -1)$ tillhör tangenten måste $d_1 = 17$. En vektor som är vinkelrät mot $\mathbf{n}$ är tydligen

$$\mathbf{t} \coloneqq (-5, 11)$$

(ty $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$) vilket alltså är en riktningsvektor för tangenten. Det följer att *normalen* har ekvationen

$$-5x + 11y = d_2$$

för något $d_2 \in \mathbb{R}$. Eftersom $(2, -1)$ tillhör normalen måste $d_2 = -21$. Notera att

$$-5x + 11y = -21 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5x - 11y = 21$$

där högra ekvationen är snyggare.

Svar: Tangenten är $11x + 5y = 17$ och normalen är $5x - 11y = 21$.