Uppgift 2.45

Bestäm ekvationer för alla linjer som tangerar ellipsen $x^2 + xy + y^2 = 1$ och som går genom punkten $(0,2)$.

Lösning: Det är geometriskt uppenbart att det finns precis två sådana linjer (varför?), och ingen av dem är lodrät. Vi börjar med att bestämma tangeringspunkterna för dessa. Låt (a, b) vara en sådan tangeringspunkt. Då vet vi dels att (a, b) tillhör ellipsen, dels att (a, b) tillhör en av linjerna. En (icke-vertikal) rät linje genom punkten $(0,2)$ har ekvationen $y = 2 + kx$. Vi vet därför att

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 \\ b = 2 + ka. \end{cases}$$

Dessutom vet vi något om k, eftersom linjens lutning är sådan att den *tangerar* ellipsen i (a, b). En normalvektor till ellipsen i (a, b) är $(2a + b, a + 2b)$ så en riktningsvektor för linjen är $(-a - 2b, 2a + b) =: (\Delta x, \Delta y)$. Det följer att linjens lutning är

$$k := \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2a + b}{a + 2b}.$$

Vi har därför följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 \\ b = 2 + ka \\ k = -\dfrac{2a + b}{a + 2b} \end{cases}$$

med tre ekvationer i tre obekanta (precis lagom). Vi eliminerar genast den för oss ointressanta storheten k, och sedan löser vi det nya systemet på vanligt sätt:

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 \\ b = 2 + ka \\ k = -\dfrac{2a + b}{a + 2b} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 \\ b = 2 - \dfrac{2a + b}{a + 2b} a \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 \\ 2a^2 + 2b^2 + 2ab = 2a + 4b \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 \\ 2 = 2a + 4b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 \\ a = 1 - 2b \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (1 - 2b)^2 + (1 - 2b)b + b^2 = 1 \\ a = 1 - 2b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b \in \{0,1\} \\ a = 1 - 2b \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (a, b) = (1,0) \quad \text{eller} \quad (a, b) = (-1, 1).$$

Nu när vi känner till de två möjliga tangeringspunkterna är det förstås trivialt att bestämma de två linjerna: dessa går ju igenom dels $(0,2)$, dels en av tangeringspunkterna. Och att bestämma ekvationen för den linje som passerar genom två givna punkter är förstås en välbekant uppgift. [Alternativt kan den ”ointressanta” formeln för k ovan användas.] Vi erhåller de två linjerna

$$\begin{aligned} L_1&: \quad y = 2 - 2x \\ L_2&: \quad y = 2 + x. \end{aligned}$$

Svar: De två linjerna $y = 2 - 2x$ och $y = 2 + x$ är de enda som uppfyller kraven.