# Uppgift 2.46

Vi skall bestämma skärningspunkterna mellan hyperblerna $x^2 - y^2 = 3$ och $xy = 2$, samt vinklarna mellan kurvorna i dessa punkter.

Först, skärningspunkterna. Notera att $y = 2/x$ så första ekvationen ger

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$$

eller

$$x^4 - 4 = 3x^2.$$

Sätt $t \coloneqq x^2$ för att erhålla

$$t^2 - 4 = 3t$$

med lösningarna

$$t \in \{-1, 4\}.$$

Men eftersom $t = x^2 > 0$ så måste $t = 4$ varvid $x = \pm 2$ och de motsvarande $y$-värdena är $\pm 1$. Skärningspunkterna är alltså

$$\mathrm{P1} = (2, 1),\ \mathrm{P2} = (-2, -1).$$

Skärningsvinklarna är lika med vinklarna mellan kurvornas tangenter i skärningspunkterna. Men dessa vinklar måste ju vara lika med vinkeln mellan kurvornas *normaler* i samma punkter. Och eftersom kurvorna kan betraktas som nivåkurvor till skalärfälten $f(x, y) = x^2 - y^2$ respektive $g(x, y) = xy$ så är vinkeln lika med vinkeln mellan skalärfältens gradienter i punkterna.

I P1 har vi

$$\nabla f(2, 1) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(2, 1) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

varför $\nabla f(2, 1) \cdot \nabla g(2, 1) = 0$ och därmed är $\nabla f(2, 1) \perp \nabla g(2, 1)$ så att vinkeln är 90°.

I P2 har vi

$$\nabla f(-2, -1) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(-2, -1) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

varför även $\nabla f(-2, -1) \cdot \nabla g(-2, -1) = 0$ och därmed är ju också $\nabla f(-2, -1) \perp \nabla g(-2, -1)$.