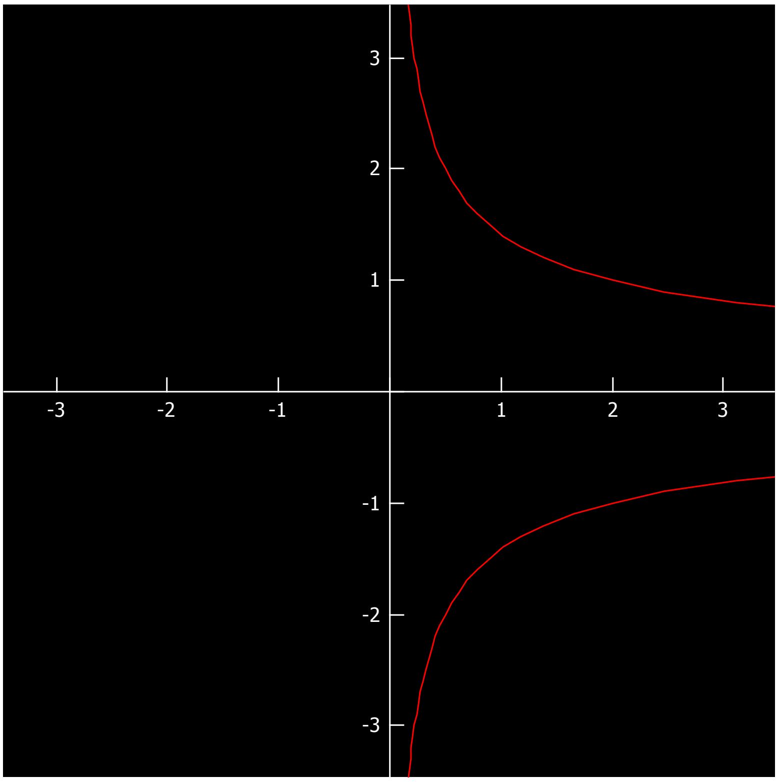
Uppgift 2.48

Bestäm de punkter på kurvan $xy^2 = 2$ i vilka normallinjen till kurvan går genom origo.

Lösning: Ekvationen är ekvivalent med $x = 2/y^2$ så kurvan ser ut så här:



Det är geometriskt uppenbart att det finns *två* punkter i vilka normallinjen till kurvan går genom origo. En av dem ligger i första kvadranten och en i fjärde.

Låt (a, b) vara en av de sökta punkterna. Då vet vi förstås att (a, b) tillhör kurvan, d.v.s. $ab^2 = 2$. Vad vet vi mer? Jo, normallinjen till kurvan i (a, b) passerar genom origo. För att uttrycka detta i formler tar vi fram ett uttryck för normallinjen.

Kurvan $xy^2 = 2$ är uppenbarligen nivåkurvan $F(x, y) = 2$ till skalärfältet $F(x, y) = xy^2$. Detta skalärfält har gradienten $\nabla F(x, y) = (y^2, 2xy)$. En normalvektor till kurvan i punkten (a, b) är därför $\mathbf{n} = (b^2, 2ab)$ eftersom vektorn $\nabla F(x, y)$ alltid är vinkelrät mot den nivåkurva $F(x, y) = C$ som går igenom punkten (x, y). Normalen till kurvan i punkten (a, b) kan alltså parameteriseras

$$\underline{\mathbf{e}}\binom{x}{y} = \underline{\mathbf{e}}\binom{a}{b} + t\underline{\mathbf{e}}\binom{b^2}{2ab}$$

– detta är ju den räta linjen som går genom (a, b) och har riktningsvektorn $(b^2, 2ab)$. Kravet på punkten (a, b) är alltså att den här linjen går igenom origo, $(0,0)$. Det finns alltså en tidpunkt t sådan att

$$\underline{\mathbf{e}}\binom{a}{b} + t\underline{\mathbf{e}}\binom{b^2}{2ab} = \underline{\mathbf{e}}\binom{0}{0}.$$

Vi har därför följande villkor på (a, b):

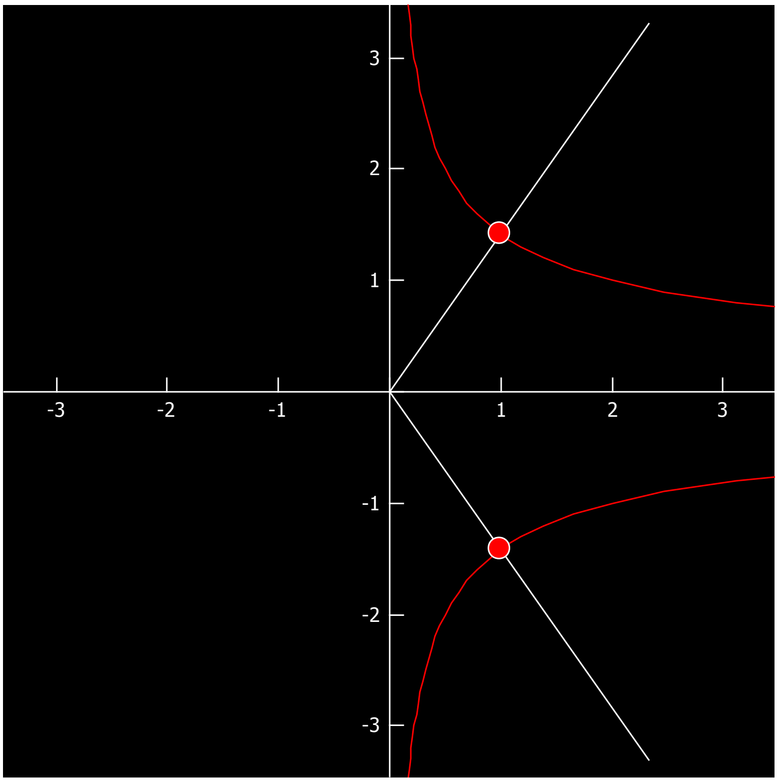
$$\begin{cases} ab^2 = 2 \\ a + tb^2 = 0 \\ b + 2tab = 0. \end{cases}$$

Detta är tre ekvationer i tre obekanta, vilket är alldeles förträffligt (det är ju då man ”brukar” få enstaka lösningar). Andra ekvationen ger $t = -a/b^2$ som instoppat i tredje ekvationen ger $b - \frac{2a^2}{b} = 0$, d.v.s. $b^2 - 2a^2 = 0$. Första ekvationen ger $a = 2/b^2$ så att $b^2 - 2a^2 = b^2 - 8/b^4 = 0$ vilket är ekvivalent med $b^6 = 8$, d.v.s. $b = \pm\sqrt[6]{8} = \pm\sqrt{2}$. Vi får då $a = 2/b^2 = 2/2 = 1$.

Vi har därför funnit de två sökta punkterna:

$$(a, b) = \left(1, \sqrt{2}\right) \quad \text{eller} \quad (a, b) = \left(1, -\sqrt{2}\right).$$

I bilden nedan markeras dessa tillsammans med kurvans normallinjer i dessa punkter – notera att båda går genom origo!



Svar: I punkterna $\left(1, \sqrt{2}\right)$ och $\left(1, -\sqrt{2}\right)$ går normallinjen till $xy^2 = 2$ genom origo. Inga andra punkter på kurvan har denna egenskap.