Uppgift 2.50

Bestäm alla punkter på ytan

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ \ x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz = 1\}$$

i vilka ytans tangentplan är parallellt med planet $x - y + 2z = 0$.

Lösning: Inför skalärfältet $F(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz$ så att S är nivåytan $F(x,y,z) = 1$. Gradienten är $\nabla F(x,y,z) = (2x + 2y, 4y + 2x + 2z, 6z + 2y)$.

Låt $(a,b,c) \in S$ vara en punkt där tangentplanet är parallellt med det givna planet. Att ytans tangentplan i en punkt är parallellt med det givna planet är ekvivalent med att ytans normal i punkten är parallell med vektorn $(1,-1,2)$. Ytans normal i en punkt är vidare parallell med skalärfältets gradient i punkten. Alltså är $\nabla F(a,b,c) \parallel (1,-1,2)$, vilket precis betyder att det finns ett tal $\lambda \in \mathbb{R}$ sådant att $\nabla F(a,b,c) = \lambda(1,-1,2)$. Tillsammans med villkoret $(a,b,c) \in S$ får vi därför ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2a + 2b = \lambda \\ 2a + 4b + 2c = -\lambda \\ 2b + 6c = 2\lambda \\ a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 2ab + 2bc = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + 2b = \lambda \\ 2a + 4b + 2c = -2a - 2b \\ 2b + 6c = 4a + 4b \\ a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 2ab + 2bc = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2a + 2b = \lambda \\ c = -2a - 3b \\ 2a + b - 3c = 0 \\ a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 2ab + 2bc = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + 2b = \lambda \\ c = -2a - 3b \\ 4a + 5b = 0 \\ 13a^2 + 23b^2 + 34ab = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2a + 2b = \lambda \\ c = -2a - 3b \\ b = -\dfrac{4}{5}a \\ \dfrac{13}{25}a^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + 2b = \lambda \\ c = \pm\dfrac{2}{\sqrt{13}} \\ b = \mp\dfrac{4}{\sqrt{13}} \\ a = \pm\dfrac{5}{\sqrt{13}}. \end{cases}$$

Följaktligen är

$$(a,b,c) = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}(5,-4,2).$$

Svar: Det finns precis två punkter som uppfyller villkoret, nämligen $\pm\frac{1}{\sqrt{13}}(5,-4,2)$.