Uppgift 2.64

Deluppgift a

Vi skall Maclaurinutveckla skalärfältet $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definierat av

$$F(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)e^y.$$

Lösning: Vi vet sedan envariabelanalysen att

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \mathcal{O}(y^3)$$

så att

$$F(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)\left(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \mathcal{O}(y^3)\right) = x^2 + y^2 - 1 - y - \frac{1}{2}y^2 + \mathcal{O}(\rho^3)$$
$$= -1 - y + x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \mathcal{O}(\rho^3)$$

där $\rho \coloneqq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Svar: $F(x,y) = -1 - y + x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \mathcal{O}(\rho^3)$.

Anmärkning. Här lät vi en hel del termer absorberas av $\mathcal{O}(\rho^3)$. Hur vet vi att det är möjligt? Kom ihåg att $\mathcal{O}(\rho^3)$ betyder ”en i någon omgivning av origo begränsad funktion i planet gånger ρ^3”, d.v.s. $\mathcal{O}(\rho^3) = b(x,y)\rho^3$ för något skalärfält $b\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som är begränsat i någon omgivning av origo.

En av termerna vi skippade var

$$x^2 y = \rho^2 \cos^2\varphi\, \rho \sin\varphi = \rho^3 \cos^2\varphi \sin\varphi \eqqcolon b_1(x,y)\rho^3$$

där $b_1(x,y) \coloneqq \cos^2\varphi \sin\varphi$ uppenbarligen är begränsad. Alltså är $x^2 y = \mathcal{O}(\rho^3)$, som önskat. Ett annat exempel på en skippad term är

$$x^2 \cdot \frac{1}{2}y^2 = \rho^2 \cos^2\varphi \cdot \frac{1}{2}\rho^2 \sin^2\varphi = \rho^3 \cdot \frac{1}{2}\rho \cos^2\varphi \sin^2\varphi \eqqcolon b_2(x,y)\rho^3$$

där $b_2(x,y) \coloneqq \frac{1}{2}\rho \cos^2\varphi \sin^2\varphi$ också är begränsad i en omgivning av origo. Alltså är $x^2 \cdot \frac{1}{2}y^2 = \mathcal{O}(\rho^3)$. Som sista exempel tar vi

$$x^2 \cdot \mathcal{O}(y^3) \overset{\text{def}}{=} x^2 \cdot b(y)y^3 = \rho^2 \cos^2\varphi \cdot b(\rho\sin\varphi)\rho^3 \sin^3\varphi \eqqcolon b_3(x,y)\rho^3$$

där $b_3(x,y) \coloneqq b(\rho\sin\varphi)\rho^2 \cos^2\varphi \sin^3\varphi$ är begränsad nära origo ty b är begränsad för små argument. Alltså är $x^2 \cdot \mathcal{O}(y^3) = \mathcal{O}(\rho^3)$.