Uppgift 2.64c

Vi skall bestämma Maclaurinutvecklingen av ordning 2 till skalärfältet $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definierat av

$$F(x,y,z) = 2\sqrt{1+x^2+y} - \cos(x-z) - y.$$

Lösning: Vi kan förstås använda flervariabelanalysens fulla maskineri med gradienter och hessianer, men det räcker i det här fallet med vanliga envariabelutvecklingar.

Vi vet ju att

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^3)$$

som i specialfallet $\alpha = 1/2$ ger

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \mathcal{O}(t^3)$$

så att (enligt det vanliga resonemanget)

$$\sqrt{1+x^2+y} = 1 + \frac{1}{2}(x^2+y) - \frac{1}{8}(x^2+y)^2 + \mathcal{O}(r^3) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \mathcal{O}(r^3).$$

Samtidigt är ju

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^4)$$

så att

$$\cos(x-z) = 1 - \frac{1}{2}(x-z)^2 + \mathcal{O}(r^4) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + xz - \frac{1}{2}z^2 + \mathcal{O}(r^4).$$

Vi har därmed

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= 2 + x^2 + y - \frac{1}{4}y^2 + \mathcal{O}(r^3) - 1 + \frac{1}{2}x^2 - xz + \frac{1}{2}z^2 - y \\ &= 1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}z^2 - xz + \mathcal{O}(r^3). \end{aligned}$$

Här är, förstås, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Svar: $F(x,y,z) = 1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}z^2 - xz + \mathcal{O}(r^3)$.