Uppgift 2.66e

Vi betraktar den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = 4hk + 4kl - 2h^2 - 3k^2 - 4l^2.$$

Eftersom

$$Q(h,k,l) = (h \quad k \quad l)\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$$

kan vi bestämma den kvadratiska formens signatur genom att studera egenvärdena till den symmetriska matrisen

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Den karaktäristiska ekvationen är (vi utvecklar determinanten längs första raden)

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \\
&= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (-2-\lambda)\big((3+\lambda)(4+\lambda) - 4\big) - 2(-8-2\lambda) = \\
&= -(2+\lambda)(8 + 7\lambda + \lambda^2) + 16 + 4\lambda = \\
&= -(16 + 14\lambda + 2\lambda^2 + 8\lambda + 7\lambda^2 + \lambda^3) + 16 + 4\lambda = \\
&= -(16 + 22\lambda + 9\lambda^2 + \lambda^3) + 16 + 4\lambda = -\lambda^3 - 9\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 9\lambda + 18) = \\
&= 0
\end{aligned}$$

som är ekvivalent med $\lambda = 0$ <u>eller</u>

$$\begin{aligned}
\lambda^2 + 9\lambda + 18 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\lambda + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} + \frac{72}{4} = 0 \quad \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \quad \left(\lambda + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda + \frac{9}{2} = \pm\frac{3}{2} \quad \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \quad \lambda = -\frac{9}{2} \pm \frac{3}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda = -6 \quad \text{eller} \quad \lambda = -3.
\end{aligned}$$

Vi har alltså de tre egenvärdena -6, -3 och 0. Alltså är den kvadratiska formen **negativt <u>semi</u>definit**, d.v.s. den ger alltid ifrån sig icke-positiva värden (≤ 0), men den ger ifrån sig noll även *utanför* origo.