Uppgift 3.16

Vi betraktar ekvationen

$$y^3 + y = e^x - x + 9. \tag{1}$$

Vänsterledet är $y^3 + y$, och det här är ett uttryck i y. Funktionen $y \mapsto y^3 + y$ är strängt växande eftersom

$$\frac{d}{dy}(y^3 + y) = 3y^2 + 1 \geq 1, \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Dessutom har vi $y^3 + y \to \pm\infty$ då $y \to \pm\infty$. Funktionen $y \mapsto y^3 + y$ är alltså en *bijektion* från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, så för varje tal $c \in \mathbb{R}$ gäller att ekvationen $y^3 + y = c$ har *exakt* en lösning $y \in \mathbb{R}$. För varje $x \in \mathbb{R}$ är förstås $e^x - x + 9$ ett reellt tal, så (1) har exakt en lösning $y \in \mathbb{R}$ för varje givet $x \in \mathbb{R}$. I teorin har vi alltså en funktion f som till varje $x \in \mathbb{R}$ ger ett $y \in \mathbb{R}$ enligt ekvationen. Om vi inför

$$F(x, y) \coloneqq y^3 + y - e^x + x$$

så är kurvan (1) inget annat än nivåkurvan $F(x, y) = 9$ till skalärfältet F. Eftersom

$$\nabla F(x, y) = (1 - e^x, 3y^2 + 1)$$

aldrig är horisontell (ty $3y^2 + 1 \geq 1$ för varje $y \in \mathbb{R}$) och $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ så säger implicita funktionssatsen att vår funktion f är av klassen C^1 lokalt kring *varje* punkt på kurvan, d.v.s. $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Vi har naturligtvis $D_f = \mathbb{R}$; men vad är V_f? Betrakta högerledet

$$e^x - x + 9.$$

Vi har

$$\frac{d}{dx}(e^x - x + 9) = e^x - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0$$

och $e^x - 1$ är > 0 för $x > 0$ och < 0 för $x < 0$. Alltså har funktionen $x \mapsto e^x - x + 9$ ett lokalt minimum – i själva verket funktionens globala minimum – då $x = 0$. Funktionsvärdet är då 10. Det är också klart att $e^x - x + 9 \to \infty$ då $x \to \infty$, så värdemängden till funktionen $g: x \mapsto e^x - x + 9$ är $V_g = [10, \infty[$. Högerledet i (1) antar sålunda alla värden i $[10, \infty[$ och funktionen $y \mapsto y^3 + y$ är strängt växande. Det innebär att y antar alla värden i $[2, \infty[$ (eftersom $2^3 + 2 = 10$). Med andra ord är $V_f = [2, \infty[$.