Uppgift 3.19

Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xyz=6 \end{cases}$$

i någon omgivning av $(1,2,3)$ definierar C^1-funktioner $x(y)$ och $z(y)$. Bestäm också $x(2)$ och $z(2)$ och räkna ut $x'(y)$ och $z'(y)$ och speciellt $x'(2)$ och $z'(2)$.

Lösning: Varje ekvation är i sig en yta, så ekvationssystemet ger alltså ytornas snitt, d.v.s. deras skärnings*kurva*. Vi skall visa att denna kurva i närheten av $(1,2,3)$ – en punkt som vi lätt ser ligger på skärningskurvan – kan parameteriseras med y som parameter.

Låt $F(x,y,z) \coloneqq x+y+z$ och $G(x,y,z) \coloneqq xyz$. Då är ytorna nivåytorna $F(x,y,z)=6$ respektive $G(x,y,z)=6$. Vi har

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ yz & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2-6 = -4 \neq 0$$

så skärningskurvan *kan* parameteriseras med y i någon omgivning av $(1,2,3)$. Naturligtvis är $x(2)=1$ och $z(2)=3$. I vår omgivning av $(1,2,3)$ har vi alltså

$$\begin{cases} x(y)+y+z(y)=6 \\ x(y)yz(y)=6 \end{cases}$$

och derivering m.a.p. y ger

$$\begin{aligned} x'+1+z' &= 0 \\ x'yz+xz+xyz' &= 0. \end{aligned}$$

Vi löser ut x' och z' och erhåller

$$\begin{aligned} x'(y) &= \frac{x(y-z)}{y(z-x)} \\ z'(y) &= \frac{z(x-y)}{y(z-x)}. \end{aligned}$$

Speciellt får vi

$$\begin{aligned} x'(2) &= -\frac{1}{4} \\ z'(2) &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$