Uppgift 3.9

Vi studerar funktionen

$$\begin{aligned} u &= e^x + y \\ v &= 2x + e^y. \end{aligned} \tag{1}$$

Detta är en funktion $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som tar in en punkt (x, y) i xy-planet och ger ifrån sig en punkt (u, v) i uv-planet. Funktionen är uppenbarligen inte linjär [visa det utifrån definitionen[1] av linjär avbildning!], så det finns inte någon matris A sådan att

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Däremot, kring varje punkt $\mathbf{x} = (x, y)$, som avbildas på $\mathbf{u} = (u, v)$, så gäller att

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$$

om $\mathbf{h} = (h, k)$ är ett vektor med litet belopp, där

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} e^x & 1 \\ 2 & e^y \end{pmatrix}$$

är funktionalmatrisen till $\mathbf{f}$. Det betyder, att i ett litet område kring $\mathbf{x}$ i xy-planet, som alltså avbildas på ett litet område kring $\mathbf{u}$ i uv-planet, så kan vi ”approximera” funktionen $\mathbf{f}$ med den linjära avbildning som ges av dess funktionalmatris $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ i $\mathbf{x}$. Med detta menas (tydligen) att

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$$

d.v.s. det lilla steg $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ vi går i uv-planet som en följd av steget $\mathbf{h}$ i xy-planet ges precis av den linjära avbildningen $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$. Det är i precis den här meningen som funktionalmatrisen lokalt ”approximerar” funktionen.

Dessutom blir *felet* mindre ju mindre omgivningen är. Det är då inte helt oväntat att vi har resultatet i boken, att funktionen $\mathbf{f}$ är inverterbar i någon omgivning av $\mathbf{x}$ om och endast om funktionalmatrisen är det i samma omgivning, d.v.s. omm dess determinant är nollskild (sitt och tänk på det en stund!). Men

$$|\mathbf{f}'(\mathbf{x})| = e^{x+y} - 2 = e - 2 \neq 0$$

i punkten $(x, y) = (1, 0)$, så i en liten omgivning av den här punkten är funktionen $\mathbf{f}$ alltså injektiv.

Den inversa avbildningen $\mathbf{f}^{-1}$ till $\mathbf{f}$, som tar in en punkt (u, v) i uv-planet och ger ifrån sig en punkt (x, y) i xy-planet är svår att finna genom att invertera sambandet (1). Däremot ger resonemanget ovan att inversen i en liten omgivning av punkten $\mathbf{u}$ ”approximeras” [i den meningen som används ovan] väl av inversen till funktionalmatrisen $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$, d.v.s.

$$(\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{u}) = \frac{1}{e^{x+y} - 2} \begin{pmatrix} e^y & -1 \\ -2 & e^x \end{pmatrix}.$$

[1] En funktion $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ säges vara *linjär* omm $\mathbf{f}(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}) = \mathbf{f}(\mathbf{u_1}) + \mathbf{f}(\mathbf{u_2})$ för varje par av vektorer $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathbb{R}^2$ och $\mathbf{f}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{u})$ för varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ och skalär $\alpha \in \mathbb{R}$.

Men *om* vi hade lyckats invertera sambandet (1) och på så sätt funnit den exakta inversen $\mathbf{f}^{-1}$, och sedan hade tagit fram funktionalmatrisen för inversen, så hade vi fått

$$(\mathbf{f}^{-1})' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Så det är inte konstigt att vi har resultatet

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{e-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & e \end{pmatrix}$$

i punkten $(u, v) = (e, 3)$.