Uppgift 4.25

Vi skall bestämma max och min av

$$f(x,y,z) = 2x - 2y + z$$

då

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$$

samt

$$h(x,y,z) = x^2 + y^2 - z \leq 0.$$

Rita området! $g(x,y,z) \leq 2$ betyder att vi befinner oss *innanför* en sfär med radie $\sqrt{2}$ och medelpunkt i origo. Ytan $x^2 + y^2 = z$ är en paraboloid, så villkoret $h(x,y,z) \leq 0$ betyder att $x^2 + y^2 \leq z$, d.v.s. z får vara hur stor som helst, d.v.s. vi befinner oss *inuti* paraboloiden, inte utanför den. Vi har nu en mycket klar bild av området i huvudet. Området begränsas nedan av en paraboloid, och ovan av en bit av en sfär. Problemet är att bestämma största och minsta värde av skalärfältet f [tänk temperaturen] i det här området.

Först letar vi efter lokala max- och minpunkter inuti området. I en sådan punkt är

$$\nabla f(x,y,z) = \mathbf{0}$$

som i det här fallet lyder

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

som saknar lösning. Skalärfältet f saknar alltså lokala max- och minpunkter. Däremot ser vi att funktionen är icke-konstant. Till exempel längs linjen $y = z = 0$ är $f(x,y,z) = 2x$ och ökar alltså när vi går mot $+\infty$ längs x-axeln och minskar när vi går mot $-\infty$. Vi bör alltså finna max- och min där vi ”hugger” av området, d.v.s. på randen. Först undersöker vi den övre randen, sfärbiten.

Sfärbiten

Vi söker alltså max och min av $f(x,y,z)$ under bivillkoret $g(x,y,z) = 2$ (på sfären gäller ju likhet). Satsen i boken säger då att intressanta punkter ges av

$$\nabla f(x,y,z) \parallel \nabla g(x,y,z).$$

Vi skulle alltså kunna sätta $\nabla f(x,y,z) = k\nabla g(x,y,z)$ som är tre ekvationer i de fyra obekanta k, x, y och z. Tillsammans med villkoret $g(x,y,z) = 2$ [vi befinner oss på sfären] har vi då fyra ekvationer och fyra obekanta. Vi kan emellertid spara lite tid genom att redan direkt eliminera den ointressanta konstanten k, genom att notera att $\nabla f(x,y,z) \parallel \nabla g(x,y,z) \Leftrightarrow \nabla f(x,y,z) \times \nabla g(x,y,z) = 0$ [varför?]. Detta är tre ekvationer i de tre obekanta x, y och z. Räkning ger $y = -x$ och $z = \frac{1}{2}x$. Eftersom en punkt på sfären måste … ligga på sfären, så har vi också $g(x,y,z) = 2$ som ger $x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Vi fann alltså de intressanta punkterna $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ samt $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ på sfären. [Naturligtvis kunde vi också ha löst det här delproblemet genom att parametrisera sfären i (t.ex.) de sfäriska koordinaterna φ och θ och optimerat f på parameterplanet.]

Däremot måste vi förkasta båda dessa punkter; förvisso ligger de på *sfären*, men de ligger ändå utanför vårt område, eftersom $h(x, y, z) > 0$ här. (Markera punkterna i din bild!)

Vi måste förstås undersöka randen på sfärbiten separat, eftersom skalärfältet kan vara ”på väg” någonstans där vi hugger av sfären. Den här randen, som ju också är randen till paraboloidbiten, är en cirkel. Vi vill alltså finna max och min av $f(x, y, z)$ på den här cirkeln. Vi kan då antingen parametrisera cirkeln eller utnyttja det faktum, att en intressant punkt, d.v.s. en punkt som optimerar $f(x, y, z)$ under de två bivillkoren $g(x, y, z) = 2$ och $h(x, y, z) = 0$ [cirkeln tillhör ju både sfären och paraboloiden], är sådan att de tre gradienterna ∇f, ∇g och ∇h är linjärt beroende i punkten.

Metod 1: Parametrisering

Cirkeln $g(x, y, z) = 2$, $h(x, y, z) = 0$ kan parametriseras

$$x = \cos\varphi$$
$$y = \sin\varphi$$
$$z = 1.$$

Detta är lätt att inse. [Om $z = x^2 + y^2$, så är ju $x^2 + y^2 + z^2 = z + z^2 = 2$ som kräver $z = 1$ i vårt fall. Då är $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + 1 = 2$ så att $x^2 + y^2 = 1$, d.v.s. cirkeln ligger på höjden $z = 1$ och har radien 1.]

På den här cirkeln är temperaturen

$$f(x, y, z) = 2\cos\varphi - 2\sin\varphi + 1.$$

Hjälpvinkelomskrivning ger

$$f(x, y, z) = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) + 1.$$

Maximum erhålles när sin har sitt maximum, d.v.s. när $\varphi = -\frac{\pi}{4}$; minimum erhålles när sin har sitt minimum, d.v.s. när $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. På cirkeln har vi alltså funnit maximipunkt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ och minimipunkt $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

Metod 2: Bivillkor

På cirkeln vill vi alltså hitta max och min av $f(x, y, z)$ under bivillkoren $g(x, y, z) = 2$ och $h(x, y, z) = 0$. Då söker vi alltså punkter där de tre gradienterna ∇f, ∇g och ∇h är linjärt beroende. Men tre vektorer är linjärt beroende om och endast om volymen av den parallellepiped de genererar är noll. I det här fallet får vi alltså villkoret $(\nabla f, \nabla g \times \nabla h) = 0$. Detta är en ekvation i tre obekanta, men tillsammans med $g(x, y, z) = 2$ och $h(x, y, z) = 0$ har vi ju tre ekvationer i tre obekanta. Lösningarna är precis de vi erhöll i Metod 1: Parametrisering ovan, nämligen $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ samt $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

Paraboloiden

Vi måste nu hitta max och min av $f(x, y, z)$ på den undre begränsningsytan av området, d.v.s. på paraboloiden. Naturligtvis kan vi lösa det här problemet genom att parametrisera paraboloiden (t.ex. i x och y), men det är nog lättare att använda satsen i boken, som säger att i en punkt som är kandidat till att vara max- eller minpunkt, där är $\nabla f(x, y, z) \parallel \nabla g(x, y, z)$. Precis som förut är vi smarta nog att undersöka kryssprodukten mellan gradienterna. Vi erhåller då villkoren $x = -1$ samt $y = 1$. Eftersom en punkt på paraboloiden faktiskt ligger på paraboloiden (!) så måste också $h(x, y, z) = 0$, vilket ger $z = 2$. Vi har alltså en intressant punkt $(-1, 1, 2)$. Denna måste vi emellertid förkasta, för även om den ligger på paraboloiden, så tillhör den inte vårt område, eftersom $g(x, y, z) = 6 > 2$ här. Punkten ligger uppenbarligen utanför vår sfär. (Markera punkten in din bild!)

Sammanfattning

Intressanta punkter och skalärfältets värde $f(x, y, z)$ [tänk temperaturen] i dessa punkter:

Punkt (x, y, z)	**Värde $f(x, y, z)$**
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$	$1 + 2\sqrt{2}$
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$	$1 - 2\sqrt{2}$

Det största värdet av dessa är $1 + 2\sqrt{2}$. Det minsta är $1 - 2\sqrt{2}$. Därmed är vi klara.