Uppgift 4.2e

Vi skall finna maximum och minimum av funktionen

$$f(x, y) = (x + 2y)e^{-x^2-y^2}$$

på den kompakta enhetsskivan

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Vi bestämmer först alla lokala stationära punkter till f i D. I dessa punkter är gradienten

$$\nabla f(x, y) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} (1 - 2x^2 - 4xy)e^{-x^2-y^2} \\ (2 - 4y^2 - 2xy)e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$e^{-x^2-y^2} > 0, \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 (\supset D)$$

så måste

$$\begin{aligned} 1 - 2x^2 - 4xy &= 0 \\ 2 - 4y^2 - 2xy &= 0. \end{aligned}$$

Första ekvationen ger

$$y = \frac{1}{4x} - \frac{x}{2}$$

som instoppat i den andra ekvationen ger

$$x = \pm \frac{1}{10}.$$

Tillsammans med $y = \frac{1}{4x} - \frac{x}{2}$ ger detta lösningarna

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right).$$

I dessa punkter är skalärfältet (tänk temperaturen) lika med

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{\frac{5}{2e}}, \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{\frac{5}{2e}}.$$

Dessa punkter är alltså de stationära punkterna till skalärfältet f på hela planet. Men ligger de i enhetsdisken? Jo, vi ser att $x^2 + y^2 \leq 1$ för båda punkterna. Dessa punkter är alltså samtliga stationära punkter i området.

Men vi måste förstås undersöka randen $x^2 + y^2 = 1$ separat, eftersom skalärfältet kan vara ”på väg” någonstans där vi hugger av området, vilket naturligtvis inte syns på gradienten eftersom denna är lyckligt ovetande om vår avhuggning.

Randen kan parametriseras

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi \\ y &= \sin\varphi \end{aligned}$$

så att skalärfältets värde (temperaturen, säg) på randen vid vinkeln φ är

$$f(\varphi) = f\big(x(\varphi), y(\varphi)\big) = (\cos\varphi + 2\sin\varphi)e^{-1}.$$

Hjälpvinkelomskrivning ger

$$f(\varphi) = \frac{\sqrt{5}}{e}\sin(\varphi + \theta)$$

där $\theta \coloneqq \arctan(1/2)$. Vi ser alltså att $-\frac{\sqrt{5}}{e} \leq f(\varphi) \leq \frac{\sqrt{5}}{e}$. Men $\frac{\sqrt{5}}{e} = \sqrt{\frac{5}{e^2}} < \sqrt{\frac{5}{2e}}$ eftersom $e^2 = e \cdot e > 2e$ eftersom $e > 2$ så det minsta värdet på randen är större än det minsta innanför randen, och det största värdet på randen är mindre än det största värdet innanför randen.

Alltså är maximum och minimum av f på D lika med

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{\frac{5}{2e}}, \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{\frac{5}{2e}}$$

och antas endast i de angivna punkterna $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) \quad \text{och} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$.