Uppgift 4.3b

Vi skall finna största och minsta värde av skalärfältet $F(x,y,z) = 3x + xy + z^2$ på det kompakta halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0$.

Lösning: Vi bestämmer först skalärfältets stationära punkter:

$$\nabla F(x,y,z) = (3+y, x, 2z) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,-3,0)$$

och i denna enda stationära punkt antar F värdet $F(0,-3,0) = 0$.

Vi behöver förstås undersöka kroppens rand separat. Randen består dels av halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z > 0$ och dels av cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 9$, $z = 0$. Notera att dessa två ytor har en gemensam rand, nämligen cirkeln $x^2 + y^2 = 9, z = 0$. Låt oss börja med halvsfären, som kan parametriseras

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= \sqrt{9 - u^2 - v^2}. \end{aligned}$$

Vi vill alltså hitta max och min av

$$F(u,v) = 3u + uv + 9 - u^2 - v^2$$

när $u^2 + v^2 < 9$. Inre stationära punkter ges av

$$\nabla F(u,v) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 + v - 2u \\ u - 2v \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (u,v) = (2,1).$$

Punkten med koordinater $(u,v) = (2,1)$ är ju $(x,y,z) = (2,1,2)$, och här är F:s värde $F(2,1,2) = 12$.

Låt oss nu undersöka bottenskivan. Här är

$$F(x,y) = 3x + xy$$

och vi vill finna största och minsta värde på $x^2 + y^2 \leq 9$. Inre stationära punkter ges av

$$\nabla F(x,y) = (3+y, x) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x,y) = (0,-3)$$

men denna punkt, $(0,-3,0)$, har vi ju redan studerat! Vi behöver nu bara undersöka randen av bottenskivan, nämligen cirkeln $x^2 + y^2 = 9, z = 0$. Denna kan parametriseras

$$\begin{aligned} x &= 3\cos\varphi \\ y &= 3\sin\varphi \\ z &= 0 \end{aligned}$$

och vi vill sålunda finna största och minsta värde av

$$F(\varphi) = 9\cos\varphi + 9\cos\varphi\sin\varphi$$

när $\varphi \in [0,2\pi[$. Derivering ger

$$F'(\varphi) = -9\sin\varphi + 9\cos^2\varphi - 9\sin^2\varphi = -9\sin\varphi + 9(1-\sin^2\varphi) - 9\sin^2\varphi =$$
$$= -18\sin^2\varphi - 9\sin\varphi + 9 = 0 \Leftrightarrow \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \sin\varphi + \frac{1}{4} = \pm\frac{3}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin\varphi \in \left\{\frac{1}{2}, -1\right\}.$$

Med tanke på att $\varphi \in [0,2\pi[$ måste alltså $\varphi \in \{\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/4\}$. Dessa vinklar svarar mot punkterna $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ respektive $(0, -3, 0)$. Den tredje är bekant sedan tidigare, och i de två nya punkterna antar F värdena $F\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ respektive $F\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) = -\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

Notera att $\left(\frac{27\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{2187}{16}$ medan $12^2 = 144 = \frac{2304}{16}$ vilket visar att $12 > \frac{27\sqrt{3}}{4}$.

Slutsats: Största värdet 12 antages i $(2, 1, 2)$. Minsta värdet $-\frac{27\sqrt{3}}{4}$ antages i $\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$.