Uppgift 4.4

Deluppgift A

Vi skall bestämma största och minsta värde av

$$f(x,y) = \arctan(x^2 + 2y^2)$$

på $\mathbb{R}^2$ (om de existerar).

Funktionen arctan är strängt växande och går mot $\pm\pi/2$ då argumentet går mot $\pm\infty$. Dessutom är $\arctan 0 = 0$. I det här fallet är argumentet till arctan $x^2 + 2y^2 \geq 0$. I synnerhet är $x^2 + 2y^2 = 0$ i $(x,y) = (0,0)$. Här har funktionen alltså sitt minsta värde, 0. Däremot går argumentet $x^2 + 2y^2 \to \infty$ när vi går från origo, så vi kan erhålla värden obegränsat nära $\pi/2$, men det finns ingen punkt där detta värdet erhålles. Således saknas största värde, men supremum [den lägsta över begränsningen, det lägsta tal M sådant att $f(x,y) \leq M, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$] är $\pi/2$.

Deluppgift C

Vi undersöker nu

$$f(x,y) = \frac{e^{y^2-x^2}}{1+y^2}$$

på $|y| \leq x$.

Rita området. Om $y \geq 0$ så är villkoret $y \leq x$; om $y < 0$ så är villkoret $y \geq -x$. Först noterar vi att på det aktuella området är $y^2 \leq x^2$ så att $y^2 - x^2 \leq 0$ och $\exp(y^2 - x^2) \leq 1$. Alltså är

$$f(x,y) = \frac{e^{y^2-x^2}}{1+y^2} \leq \frac{1}{1+y^2} \leq 1$$

på området. Men vi antar faktiskt värdet $f(x,y) = 1$ i punkten $(x,y) = (0,0)$. [Notera att den punkten är med i området ty $|0| \leq 0$.] Alltså är största värdet 1. Däremot är funktionen alltid positiv (eftersom täljare och nämnare är positiva), och vi kommer obegränsat nära 0 när vi går ifrån origo. Till exempel om vi går längs linjen $y = x$ så är $f(x,y) = \frac{1}{1+y^2}$ och vi kan komma obegränsat nära funktionsvärdet noll. Däremot saknar ekvationen $f(x,y) = 0$ lösning, så vi kan aldrig få värdet noll. Alltså saknas minsta värde, även om infimum [den högsta undre begränsningen, det största tal M sådant att $f(x,y) \geq M, \forall |y| \leq x$] är noll.