Uppgift 4.4d

Bestäm största och minsta värde (om de förekommer) av

$$F(x,y)=\frac{xy}{4+(x+y)^3}$$

på $M := [0,\infty[^2$ (d.v.s. då $x \geq 0$ och $y \geq 0$).

Lösning: Vi börjar med det lättaste, nämligen att notera att $F(x,y) \geq 0$ för alla $(x,y) \in M$ samt att $F(x,y) = 0$ överallt på randen ∂M, d.v.s. på icke-negativa x-axeln och på icke-negativa y-axeln. Alltså har F ett minsta värde på M, nämligen 0.

Sedan noterar vi att

$$F(x,y)=\frac{xy}{4+(x+y)^3}=\begin{bmatrix}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{bmatrix}=\frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{4+(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)^3}=\frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{4+\rho^3(\cos\varphi+\sin\varphi)^3}=$$
$$=\frac{\rho^2}{\rho^3}\cdot\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\frac{4}{\rho^3}+(\cos\varphi+\sin\varphi)^3}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\frac{4}{\rho^3}+\left(\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)^3}\to 0$$

då $\rho\to\infty$ eftersom

$$\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\quad\Longrightarrow\quad\varphi+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\quad\Longrightarrow\quad\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$$

så faktorn till höger om $1/\rho\to 0$ är begränsad:

$$\left|\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\frac{4}{\rho^3}+\left(\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)^3}\right|\leq\frac{1}{\frac{4}{\rho^3}+\left(\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)^3}\leq\frac{1}{\left(\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)^3}\leq\frac{1}{\left(\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}=1.$$

Låt oss nu bestämma F:s stationära punkter i det *inre* M^0 av M. Lite enkelt hantverk ger

$$\begin{cases}\nabla F(x,y)=\mathbf{0}\\ (x,y)\in M^0\end{cases}\quad\Longleftrightarrow\quad(x,y)=(1,1)$$

och i den här stationära punkten har vi

$$F(1,1)=\frac{1}{12}.$$

Så, låt oss sammanfatta: $F(x,y)\geq 0$ överallt på M, $F(x,y)=0$ på randen ∂M och $F(x,y)\to 0$ då $(x,y)\in M$ och $\rho\to\infty$. Samtidigt är $F(1,1)=1/12$ i den enda stationära punkten i M^0. Kan vi av detta dra slutsatsen att $1/12$ också är F:s *globala* maximum? Ja, faktiskt, och detta kan man motivera rigoröst så här:

Eftersom $F(x,y)\to 0$ då $(x,y)\in M$ och $\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$ är det klart (av definitionen av gränsvärde) att det finns en radie $R>0$ sådan att $F(x,y)<0.01$ för varje $(x,y)\in M$ med $\sqrt{x^2+y^2}\geq R$. Låt nu R vara ett sådant tal.

Betrakta den kompakta mängden $M_R \coloneqq \left\{(x,y) \in M : \sqrt{x^2+y^2} \leq R\right\}$. På hela randen ∂M_R är $F(x,y) < 0.01$, för på x-axeln och på y-axeln är $F(x,y) = 0$ och på kvartscirkeln är $F(x,y) < 0.01$ tack vare vårt val av R. Alltså är $F(1,1) = \frac{1}{12}$ lika med F:s största värde på M_R.

Men överallt utanför M_R (d.v.s. på $M \setminus M_R$) är $F(x,y) < 0.01$, så tydligen är $F(1,1) = \frac{1}{12}$ lika med F:s *globala* maximum på M.