# Uppgift 4.4e

Bestäm största och minsta värde (om de existerar) av $F(x,y,z) = (x-y+z)e^{-x^2-y^2-z^2}$ på $\mathbb{R}^3$.

*Lösning:* Vi söker först efter skalärfältets stationära punkter. Dessa ges av

$$\nabla F(x,y,z) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1+2xy-2xz-2x^2 \\ -1-2xy-2yz+2y^2 \\ 1+2yz-2xz-2z^2 \end{pmatrix} e^{-x^2-y^2-z^2} = \mathbf{0}$$

vilket är ekvivalent med

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I dessa stationära punkter är

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{e}}, \qquad F\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{e}}.$$

Samtidigt ser vi enkelt (t.ex. med sfäriska koordinater) att

$$F(x,y,z) \to 0 \quad \text{då} \quad r \to \infty$$

där $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Innebär detta att de två stationära punkterna verkligen ger funktionens största och minsta värde? Ja, faktiskt: här ger intuitionen rätt svar, och man kan motivera resultatet rigoröst som följer:

Eftersom $F(x,y,z) \to 0$ då $r \to \infty$ är det klart (enl. definitionen av gränsvärde) att det finns en radie $R > 0$ sådan att de två stationära punkterna ligger innanför sfären $r = R$ och $|F(x,y,z)| < 0.01$ för alla $(x,y,z)$ med $r \geq R$. Mängden $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : r \leq R\}$ är kompakt och har randen $\partial M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : r = R\}$. På randen är $|F(x,y,z)| < 0.01$, så max och min av $F$ på den kompakta mängden $M$ erhålles i de två stationära punkterna. Men utanför $M$, d.v.s. för $r > R$, är ju $|F(x,y,z)| < 0.01$ överallt, så det följer att de två stationära punkterna i själva verket är funktionens *globala* max och min.