Uppgift 6.10d

Beräkna

$$\iint_D x^2 dxdy$$

där D är den fyllda parallellogrammen med hörn i $(1,1)$, $(3,2)$, $(4,5)$ och $(2,4)$.

Lösning: Rita en bild över området! Genom att bestämma de fyra begränsande linjernas ekvationer ser vi att

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} -6 \leq x - 2y \leq -1 \\ 2 \leq 3x - y \leq 7 \end{matrix}\right\}.$$

Med variabelbytet (en funktion $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} u &= x - 2y \\ v &= 3x - y \end{aligned}$$

får vi därför att D under bytet svarar precis mot den fyllda rektangeln

$$E \coloneqq [-6, -1] \times [2, 7]$$

i uv-planet.

Funktionen $F: (x,y) \mapsto (u,v)$ har funktionaldeterminanten

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 6 = 5$$

så inversen $F^{-1}: (u,v) \mapsto (x,y)$ har funktionaldeterminanten $1/5$.

Vi kan naturligtvis bestämma inversen fullständigt, men eftersom vi bara behöver x^2 så nöjer vi oss med att notera att $u - 2v = -5x$ så att $x = (2v - u)/5$. Därför är

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dxdy &= \iint_E \frac{(2v-u)^2}{25} \cdot \frac{1}{5} dudv = \frac{1}{125} \iint_E (4v^2 - 4uv + u^2) dudv = \\ &= \frac{1}{125} \int_{-6}^{-1} \left(\int_2^7 (4v^2 - 4uv + u^2) dv \right) du = \frac{1}{125} \int_{-6}^{-1} \left(5u^2 - 90u + \frac{1340}{3} \right) du = \\ &= \frac{1}{125} \cdot \frac{12500}{3} = \frac{100}{3}. \end{aligned}$$

Svar: $\iint_D x^2 dxdy = \frac{100}{3}$ där D är den fyllda parallellogrammen med hörn i $(1,1)$, $(3,2)$, $(4,5)$ och $(2,4)$.