Uppgift 6.12

Deluppgift A

Vi skall beräkna

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

där D är ellipsskivan $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

Lösning: Notera att ellipsen kan parametriseras

$$x = 2\cos t$$
$$y = 3\sin t.$$

Det är därför lämpligt att byta koordinatsystem i planet från kartesiska koordinater (x, y) till "elliptiska koordinater" (r, φ) enligt

$$x = 2r\cos\varphi$$
$$y = 3r\sin\varphi.$$

Då svarar ellipsskivan D i xy-planet mot rektangeln $E \coloneqq [0,1] \times [0,2\pi[$ i (r, φ)-planet (d.v.s. $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq \varphi < 2\pi$) . Funktionalmatrisen för variabelbytet är

$$\begin{pmatrix} 2\cos\varphi & -2r\sin\varphi \\ 3\sin\varphi & 3r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

så funktionaldeterminanten är $6r$. Vidare är integranden

$$x^2 + y^2 = 4r^2\cos^2\varphi + 9r^2\sin^2\varphi = 4r^2\cos^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi + 5r^2\sin^2\varphi = 4r^2 + 5r^2\sin^2\varphi.$$

Därför är

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \iint_E (4r^2 + 5r^2\sin^2\varphi)\, 6r drd\varphi = 6\iint_E r^3(4 + 5\sin^2\varphi)\, drd\varphi$$
$$= 6\int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} (4 + 5\sin^2\varphi)d\varphi = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot 13\pi = \frac{39\pi}{2}.$$

Anmärkning: Ett alternativt tillvägagångssätt är att först byta koordinater från (x, y) till (u, v) med $u = \frac{x}{2}$ och $v = \frac{y}{3}$. I det nya koordinatplanet har vi då enhetsdisken $u^2 + v^2 \leq 1$. Sedan inför vi vanliga planpolära koordinater (r, φ) med $u = r\cos\varphi$ och $v = r\sin\varphi$. I praktiken slår vi ihop dessa två variabelbyten till ett enda när vi byter från (x, y) till (r, φ) ovan.

Deluppgift B

Vi skall beräkna

$$\iint_D x^3 dxdy$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + 9y^2 \leq 9, x \geq 3y\}$.

Lösning: Första olikheten $1 \leq x^2 + 9y^2$ kan skrivas $1 \leq \left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{1/3}\right)^2$, så vi skall alltså vara *utanför* ellipsen med halvaxellängderna 1 resp. $1/3$. Andra olikheten $x^2 + 9y^2 \leq 9$ kan skrivas $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + y^2 \leq 1$ så vi skall vara *innanför* ellipsen med halvaxellängderna 3 resp. 1. Dessutom skall vi befinna oss under linjen $y = \frac{1}{3}x$. Rita området!

Om vi byter till elliptiska koordinater enligt

$$x = 3\, r \cos\varphi$$
$$y = r \sin\varphi$$

så svarar området D i xy-planet mot ett väldigt enkelt område E i $r\varphi$ -planet. Kravet att vi skall befinna oss mellan ellipserna i xy-planet betyder att $r \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$. Kravet att $y \leq \frac{1}{3}x$ betyder att $\varphi \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Vi har alltså att $E = \left[\frac{1}{3}, 1\right] \times \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ är en rektangel i $r\varphi$-planet.

Anmärkning: Precis som i föregående uppgiften kan vi dela upp koordinatbytet i två steg. Först byter vi från (x, y) till (u, v) enligt $u = \frac{x}{3}$ och $v = y$. Då svarar ellipserna mot två koncentriska cirklar, så vi har $1 \leq 9u^2 + 9v^2 \leq 9$. Vidare är det sista villkoret $x \geq 3y$ nu helt enkelt $u \geq v$. När vi sedan inför planpolära koordinater (r, φ) enligt $u = r\cos\varphi$ och $v = r\sin\varphi$ ser vi mycket tydligt att $r \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ och $\varphi \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Funktionaldeterminanten är $3r$ så vi har

$$\iint_D x^3 dxdy = \iint_E 27r^3 \cos^3\varphi \, 3r drd\varphi = 81 \int_{\frac{1}{3}}^{1} r^4 dr \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\varphi \, d\varphi = 81 \cdot \frac{242}{1215} \cdot \frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{121\sqrt{2}}{9}.$$

Deluppgift C

Vi skall beräkna

$$\iint_D x\,dxdy$$

där $D \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + 4y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

Lösning: Notera att

$$x^2 + 2xy + 4y^2 = (x+y)^2 + 3y^2 = (x+y)^2 + \left(\sqrt{3}y\right)^2$$

så lämpligen inför vi nya koordinater enligt

$$\begin{aligned} u &= x + y \\ v &= \sqrt{3}y \end{aligned}$$

så att ellipsskivan $x^2 + 2xy + 4y^2 \le 1$ heter

$$u^2 + v^2 \le 1$$

i det nya koordinatsystemet. Vi skall alltså befinna oss *innanför* enhetscirkeln i uv-planet. Villkoret $y \ge 0$ ger $v \ge 0$ medan villkoret $x \ge 0$ ger $v \le \sqrt{3}u$. Det är nu mycket lätt att rita det motsvarande området E i uv-planet. Gör det!

(Notera att det inversa koordinatbytet är

$$\begin{aligned} x &= u - \frac{v}{\sqrt{3}} \\ y &= \frac{v}{\sqrt{3}}.) \end{aligned}$$

Funktionaldeterminanten för koordinatbytet är $1/\sqrt{3}$. Vi inför nu planpolära koordinater enligt

$$\begin{aligned} u &= r\cos\varphi \\ v &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

(med funktionaldeterminant r). De motsvarande området i $r\varphi$-planet är $F \coloneqq [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ eftersom $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Vi har alltså

$$\begin{aligned} \iint_D x\,dxdy &= \iint_E \left(u - \frac{v}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}dudv = \iint_F \left(r\cos\varphi - \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}rdrd\varphi \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 r^2dr \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$