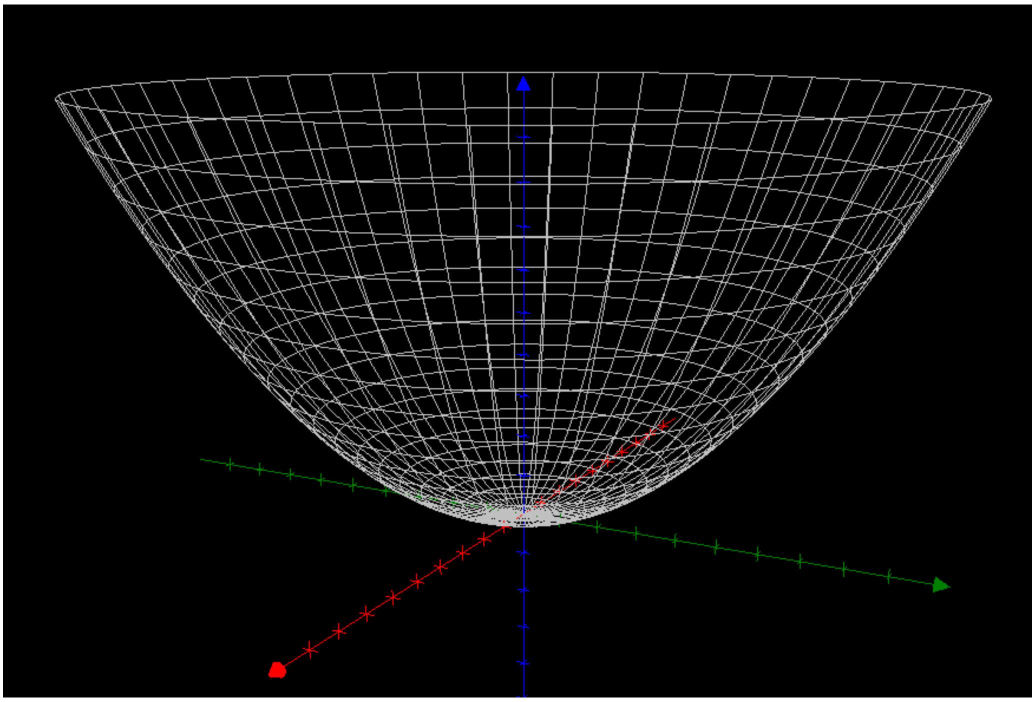
Uppgift 6.18

Låt

$$D \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \quad z \geq x^2 + y^2, \quad z \leq 1\}$$

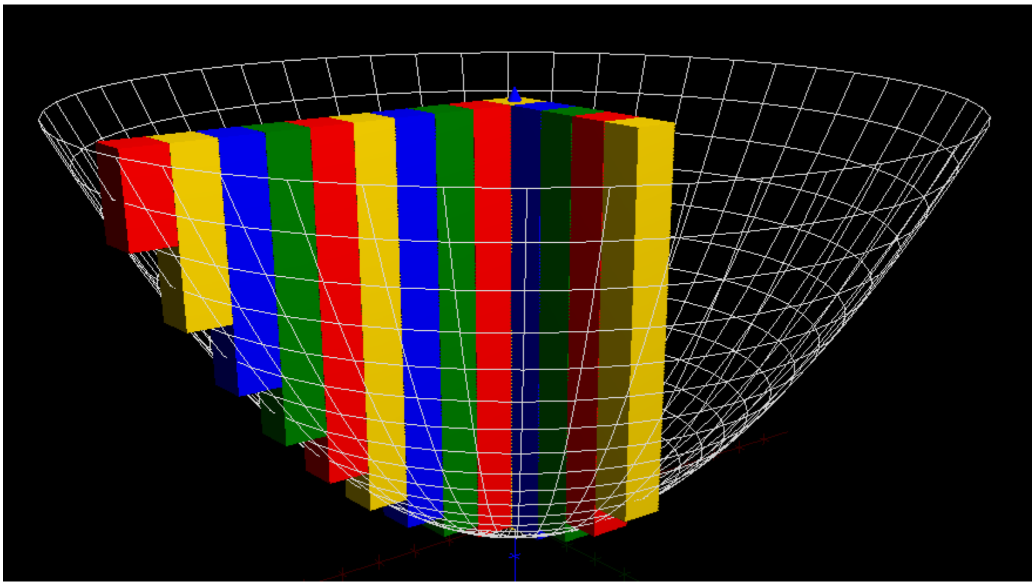
och låt $f: D \to \mathbb{R}$ vara ett skalärfält på D. Teckna integralen $I \coloneqq \iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ dels genom att använda ”skivor”, dels genom att använda ”staplar”.

Lösning och förklaring: D är uppenbarligen en fylld paraboloid, se Figur 1. Hädanefter kallar vi den ”skålen” (som alltså är fylld – det är en solid kropp). Vi kan (approximativt) dela in skålen i små skivor som i Figur 2 och i små staplar som i Figur 3 (där bara några staplar visas).



Figur 1. En paraboloid

Figur 2. ”Skivor” (eg. fyllda cylindrar) som (approximativt) fyller ut kroppen



Figur 3. ”Staplar” (eg. fyllda rätblock) som (approximativt) fyller ut kroppen

Om $f(x,y,z) = 1$ på hela D så är integralen $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ förstås inget annat än volymen av skålen. De två konstruktionerna med skivor och staplar är välkända strategier för att beräkna denna volym. Speciellt metoden med ”skivor” känns igen från envariabelanalysen, där vi beräknade volymer av rotationskroppar.

Om vi börjar med ”skivmetoden” så har vi

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz$$

där D_z är projektionen i xy-planet av den platta disk vid höjd z som erhålles när vi skär skålen med ett plan på denna höjd. Kanten på denna disk ligger på paraboloiden (själva ytan) och uppfyller därför ekvationen $x^2 + y^2 = z$. Det följer att ”skuggan” (projektionen) av disken är

$$D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad x^2 + y^2 \leq z\}$$

vilket alltså är den mängd i planet $\mathbb{R}^2$ som den inre dubbelintegralen skall beräknas över.

Om $f(x,y,z) \equiv 1$ (d.v.s. om vi beräknar volymen) så reduceras formeln ovan till

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 A(z)dz$$

där $A(z)$ är arean av disken vid höljd z, så $A(z)dz$ är volymen av en liten fylld cylinder vid den höjden och integralen är bara summan av dessa småcylindrars volymer (när indelningen blir finare och finare, så klart), d.v.s. hela skålens volym!

Om vi nu tittar på ”stapelmetoden” i stället så får vi

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

där $\tilde{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ är skuggan av hela skålen på xy-planet (fast formellt betraktad som en delmängd av $\mathbb{R}^2$ i stället för xy-planet i $\mathbb{R}^3$). Vi har ju staplar ovanför hela denna disk, och stapeln med centrum i (x,y) börjar på $z = x^2 + y^2$ (d.v.s. på paraboloiden, själva ytan) och slutar på $z = 1$.

Om $f(x,y,z) \equiv 1$ (d.v.s. om vi beräknar volymen) så reduceras formeln ovan till

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_{\tilde{D}} h(x,y)dxdy$$

där $h(x,y)$ är höjden av stapeln över (x,y). Därför är $h(x,y)dxdy$ volymen av stapeln, och dubbelintegralen är bara summan av dessa volymer (när indelningen blir finare och finare, så klart), d.v.s. hela skålens volym!

Deluppgift 2

Vi betraktar nu det konkreta skalärfältet

$$f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}.$$

Om $f(x,y,z)$ är densiteten hos skålen i punkten (x,y,z) så är integralen I lika med skålens massa.

Vilken av metoderna ovan skall vi välja? Vi prövar ”skivmetoden”. Vi får då

$$\iint_{D_z} z\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \begin{bmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ E_z \coloneqq [0,\sqrt{z}] \times [0,2\pi[\end{bmatrix} = \iint_{E_z} z\rho\rho d\rho d\varphi = z\iint_{E_z} \rho^2 d\rho d\varphi =$$
$$= z\int_0^{\sqrt{z}} \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = z \cdot \frac{1}{3} z^{3/2} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}\, z^{5/2}$$

så att

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz = \int_0^1 \left(\frac{2\pi}{3}\, z^{5/2} \right) dz = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 z^{5/2}\, dz =$$
$$= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4\pi}{21}.$$

Pröva gärna ”stapelmetoden” själv!

Bonusuppgift: Beräkna skålens volym med båda metoderna!