

Uppgift 6.22

Låt

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq y \leq x^2 \leq 1\}.$$

Det är förhållandevis enkelt att rita upp mängden i huvudet (i synnerhet om man gjort uppgift 6.21 tidigare). Om D är en byggnad så är dess golv helt enkelt mängden $x \in [-1, 1]$, $0 \leq y \leq x^2$ och "taket" över punkten (x, y) är $z(x, y) = y$. Vi finner därför enkelt

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{z}{1+x^2} dx dy dz &= \int_{-1}^{+1} \int_0^{x^2} \int_0^y \frac{z}{1+x^2} dz dy dx = \int_{-1}^{+1} \int_0^{x^2} \frac{y^2}{2x^2+2} dy dx = \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{x^6}{6x^2+6} dx = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6(1+x^2)} \right) dx = \frac{13}{45} - \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$