Uppgift 6.26

Deluppgift A

Beräkna

$$\iiint_D (z^2 - x^2 - y^2)dxdydz$$

där $D \coloneqq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ är enhetsklotet.

Lösning: Vi byter till sfäriska koordinater (r, θ, φ) enligt

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned}$$

Då svarar enhetsklotet D i (x, y, z)-rummet mot rätblocket

$$E \coloneqq [0,1] \times [0, \pi] \times [0,2\pi[$$

i (r, θ, φ)-rummet. Funktionaldeterminanten för variabelbytet $(r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$ är $r^2 \sin\theta$. Vi får sålunda

$$\begin{aligned} &\iiint_D (z^2 - x^2 - y^2)dxdydz = \\ &= \iiint_E (r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi - r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi) r^2\sin\theta \, drd\theta d\varphi = \\ &= \iiint_E (r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta) r^2 \sin\theta \, drd\theta d\varphi = \\ &= \iiint_E r^4(\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) drd\theta d\varphi = \\ &= \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi (\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2\pi = -\frac{4\pi}{15} \end{aligned}$$

eftersom

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi (\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)d\theta = \int_0^\pi (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\theta \, d\theta = \\ &= \int_0^\pi \big(\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)\big)\sin\theta \, d\theta = \int_0^\pi (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta \, d\theta = \\ &= \begin{bmatrix} t = \cos\theta \\ dt = -\sin\theta \, d\theta \end{bmatrix} = -\int_1^{-1} (2t^2 - 1)dt = \int_{-1}^1 (2t^2 - 1)dt = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Svar: $\iiint_D (z^2 - x^2 - y^2)dxdydz = -\frac{2}{3}$ där $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Deluppgift B

Beräkna

$$\iiint_D xe^{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

där $D \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0\}$ är en halva av enhetsklotet.

Lösning: Vi byter även här till sfäriska koordinater. Då svarar D i (x,y,z)-rummet mot rätblocket

$$E \coloneqq [0,1] \times [0,\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

i (r,θ,φ)-rummet. Därför får vi

$$\iiint_D xe^{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \iiint_E r\sin\theta\cos\varphi\ e^{r^2} r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi =$$
$$= \int_0^1 r^3 e^{r^2}dr \int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 = \frac{\pi}{2}$$

eftersom

$$\int_0^1 r^3 e^{r^2}dr = \int_0^1 \underbrace{r^2}_{\downarrow}\cdot\underbrace{re^{r^2}}_{\uparrow}\,dr = \left[\frac{1}{2}r^2e^{r^2}\right]_0^1 - \int_0^1 re^{r^2}dr = \left[\frac{1}{2}r^2e^{r^2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

och

$$\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta = [\text{cosinus för dubbla vinkeln}] = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Svar: $\iiint_D xe^{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \frac{\pi}{2}$ där $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

Deluppgift c

Beräkna

$$\iiint_D x\,dxdydz$$

där $D \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 3, 0 \leq x \leq y\}$. Vi byter till sfäriska koordinater. Då svarar D i (x,y,z)-rummet mot rätblocket

$$E \coloneqq \left[0,\sqrt{3}\right] \times [0,\pi] \times \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

i (r,θ,φ)-rummet. Därför får vi

$$\iiint_D x\,dxdydz = \iiint_E r\sin\theta\cos\varphi\ r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \int_0^{\sqrt{3}} r^3 dr \int_0^{\pi} \sin^2\theta\,d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi =$$
$$= \frac{9}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{9\pi}{8}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Svar: $\iiint_D x\,dxdydz = \frac{9\pi}{8}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ där $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 3, 0 \leq x \leq y\}$.