Uppgift 6.26

Vi skall beräkna

$$\iiint_D 3z dx dy dz$$

där D är den del av enhetsklotet som ligger i övre halvrummet $z \geq 0$.

Uppskattning

I princip så delar vi alltså upp klotet i en kvadriljon småbitar, och för varje småbit bestämmer vi värdet av skalärfältet $f(x, y, z) = 3z$ just där (tänk densiteten) och gångrar med bitens volym. Då får vi bitens massa. Sedan summerar vi ($\iiint$) och får sålunda hela klotets massa. Densiteten är uppenbarligen högst längst uppe på bollen; där är $f(x, y, z) = 3z = 3 \cdot 1 = 3$. Densiteten är lägst på halvklotets bottenyta, där den är 0 (så tolkningen som densitet är kanske inte helt realistisk i det här fallet!). Det är klart att en motsvarande kropp som överallt har densiteten 3 har högre massa än vår kropp. Så

$$\iiint_D 3z dx dy dz \leq \iiint_D 3 dx dy dz = 3 \iiint_D dx dy dz = 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi$$

eftersom

$$V = \iiint_D dV = \iiint_D dx dy dz = \frac{2\pi}{3}$$

är volymen av halvklotet. Vi kan alltså omedelbart inse att integralens värde är $\leq 2\pi$.

Exakt beräkning

Låt oss nu beräkna integralen exakt. Detta är mycket enkelt om vi inför sfäriska koordinater (r, θ, φ) enligt

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned}$$

Vår halvboll D svarar då mot rätblocket $E \coloneqq [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi[$ i (r, θ, φ)-rummet. Eftersom volymselementet är $dV = r^2 \sin\theta \, dr d\theta \varphi$ i sfäriska koordinater så är

$$\iiint_D 3z dx dy dz = \iiint_E 3r\cos\theta \; r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi = 3 \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$
$$= 3 \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{4}$$

där vi använt sinus för dubbla vinkeln, $\sin 2t = 2 \sin t \cos t, \forall t \in \mathbb{R}$.