Uppgift 6.28

Deluppgift A

Vi skall beräkna integralen

$$\iiint_D (y - x - z)dxdydz$$

över parallellepipeden

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} 0 \le x + y + z \le 1 \\ 0 \le x + 2y + 3z \le 1 \\ 0 \le x + 4y + 9z \le 1 \end{matrix}\right\}.$$

Lösning: Det är mycket naturligt att införa nya koordinater (u, v, w) i rummet enligt

$$\begin{aligned} u &\coloneqq x + y + z \\ v &\coloneqq x + 2y + 3z \\ w &\coloneqq x + 4y + 9z. \end{aligned}$$

Detta är ett linjärt koordinatbyte,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

och vi finner enkelt inversen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Volymskalan J är determinantens belopp, d.v.s.

$$J \coloneqq \frac{1}{2}.$$

Parallellepipeden D i (x, y, z)-rummet svarar mot enhetskuben $E \coloneqq [0,1]^3$ ($= [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$) i (u, v, w)-rummet samtidigt som integranden

$$y - x - z = 8v - 7u - 2w.$$

Alltså är

$$\iiint_D (y - x - z)dxdydz = \frac{1}{2} \iiint_E (8v - 7u - 2w)dudvdw =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (8v - 7u - 2w)du \right) dv \right) dw = \cdots = -\frac{1}{4}.$$

Deluppgift B

Vi skall nu beräkna integralen

$$\iiint_D x dx dy dz$$

där D är tetraedern med hörn i origo, $\mathbf{a} = (1,1,0)$, $\mathbf{b} = (1,0,1)$ och $\mathbf{c} = (0,1,1)$.

Lösning: Rita en bild på fyrhörningen. Tre av de fyra plan som utgör kanterna av tetraedern går genom origo, och har normalriktningarna $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1,-1,-1)$, $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = (1,-1,1)$ och $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (-1,-1,1)$. Deras ekvationer är följaktligen

$$\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ -x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

och det är festande att göra ett linjärt koordinatbyte genom att sätta

$$\begin{aligned} u &\coloneqq x - y - z \\ v &\coloneqq x - y + z \\ w &\coloneqq -x - y + z. \end{aligned}$$

Inversen är

$$\begin{aligned} x &= 0u + \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}w \\ y &= -\frac{1}{2}u + 0v - \frac{1}{2}w \\ z &= -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + 0w. \end{aligned}$$

Det fjärde planet som utgör en av fyrhörningens kanter har uppenbarligen normalriktningen $(1,1,1)$ och genom att välja högerledet så att någon av kantpunkterna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ eller $\mathbf{c}$ ligger i planet ser vi att planets ekvation är

$$x + y + z = 2.$$

De fyra villkor som definierar området D i (x,y,z)-rummet är

$$\begin{aligned} x - y - z &\le 0 \\ x - y + z &\ge 0 \\ -x - y + z &\le 0 \\ x + y + z &\le 2. \end{aligned}$$

I (u,v,w)-rummet heter dessa krav

$$\begin{aligned} u &\le 0 \\ v &\ge 0 \\ w &\le 0 \\ v - u - w &\le 2. \end{aligned}$$

Skissa området, och övertyga dig om att det är en begränsad fyrhörning! Funktionaldeterminantens belopp är $\frac{1}{4}$ så att

$$\iiint_D x\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{4}\iiint_E \left(0u + \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}w\right) du\,dv\,dw =$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-2}^{0}\left(\int_{0}^{2+u}\left(\int_{v-u-2}^{0}\left(0u + \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}w\right) dw\right) dv\right) du = \cdots = \frac{1}{6}.$$