Uppgift 6.29

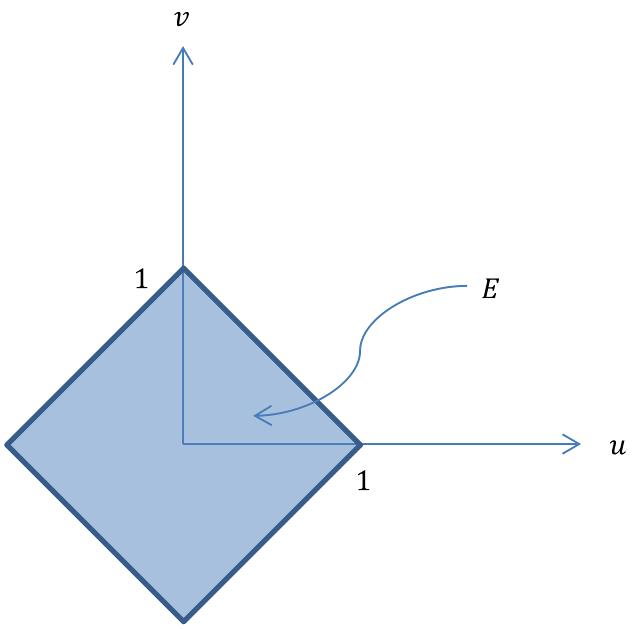
Deluppgift a

Beräkna arean av $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + 2y| + |3x - y| \leq 1\}$.

Lösning: Med variabelbytet

$$u = x + 2y$$
$$v = 3x - y$$

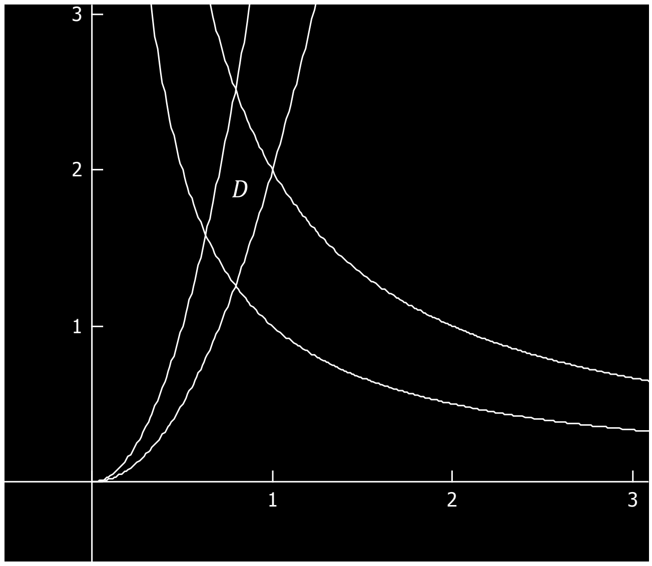
blir nya området $E := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |u| + |v| \leq 1\}$, se bild. Funktionaldeterminanten för funktionen $(x, y) \mapsto (u, v)$ är -7 så beloppet av funktionaldeterminanten för inversen $(u, v) \mapsto (x, y)$ är $1/7$. Därför är arean



$$A(D) = \iint_D dxdy = \iint_E \frac{1}{7} dudv = \frac{1}{7} \iint_E dudv = \\ = \frac{1}{7} A(E) = \frac{1}{7} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2}{7}.$$

Deluppgift b

Beräkna arean av området D som begränsas av hyperblerna $xy = 1$ och $xy = 2$ samt parablerna $y = 2x^2$ och $y = 4x^2$. Området visas i bilden till höger.



Med variabelbytet

$$u = xy$$
$$v = \frac{y}{x^2}$$

svarar D mot kvadraten

$$E := [1,2] \times [2,4]$$

i (u, v)-planet. Funktionaldeterminanten för funktionen $(x, y) \mapsto (u, v)$ är $3v$ efter förenkling så den inversa avbildningen $(u, v) \mapsto (x, y)$ har funktionaldeterminanten $1/3v$. Därför är

$$A(D) = \iint_D dxdy = \iint_E \frac{1}{3v} dudv = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_2^4 \frac{1}{v} dv = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (\ln 4 - \ln 2) = \frac{1}{3} \ln 2.$$