Uppgift 6.42b

Vi skall bestämma tyngdpunkten för ett halvklot om densiteten är proportionell mot avståndet mot motsvarande hela klots mittpunkt.

Lösning: Inför sfäriska koordinater så att halvklotet D är rätblocket $E \coloneqq [0, R] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi[$ i (r, θ, φ)-rummet. Låt densiteten i punkten (r, θ, φ) vara $\rho(r, \theta, \varphi) = kr$. Det är självklart att tyngdpunktens x- och y-koordinater båda är lika med 0. Vi behöver därför endast bestämma z-koordinaten $\hat{z}$ för tyngdpunkten. Men det är enkelt, ty

$$\hat{z} = \frac{\iiint_D z dM}{\iiint_D dM}$$

där massan

$$\iiint_D dM = \iiint_D \rho dV = \iiint_E kr\, r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi = k \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$
$$= k \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot 1 \cdot 2\pi = \frac{kR^4\pi}{2}$$

och

$$\iiint_D z dM = \iiint_D z\rho dV = \iiint_E r\cos\theta\, kr\, r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi = k \int_0^R r^4 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$
$$= k \cdot \frac{1}{5} R^5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{kR^5\pi}{5}$$

så att

$$\hat{z} = \frac{\iiint_D z dM}{\iiint_D dM} = \frac{kR^5\pi/5}{kR^4\pi/2} = \frac{2}{5} R.$$