Uppgift 6.46

Vi skall beräkna värdet av den generaliserade integralen

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}$$

där D är den del av första kvadranten som ligger under linjen $x + y = 1$.

Lösning: Låt för varje $\epsilon > 0$ mängden D_ϵ vara den delmängd av D som håller sig ϵ från koordinataxlarna (där integranden är odefinierad), d.v.s.

$$D_\epsilon \coloneqq \{(x, y) \in D : x \geq \epsilon, y \geq \epsilon\}.$$

(Rita en bild med några väl valda D_ϵ, t.ex. $\epsilon = 0.2$ och $\epsilon = 0.1$.)

Vi beräknar nu den vanliga integralen

$$I_\epsilon \coloneqq \iint_{D_\epsilon} \frac{dxdy}{\sqrt{xy}} = \int_\epsilon^{1-\epsilon} \left(\int_\epsilon^{1-x} \frac{dy}{\sqrt{xy}} \right) dx = \int_\epsilon^{1-\epsilon} \left[\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \right]_{y=\epsilon}^{1-x} dx = \int_\epsilon^{1-\epsilon} \frac{2\sqrt{1-x} - 2\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{x}} dx$$
$$= 2 \int_\epsilon^{1-\epsilon} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx - 2 \int_\epsilon^{1-\epsilon} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{x}} dx.$$

Andra integralen ger direkt

$$\int_\epsilon^{1-\epsilon} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{\epsilon x}\right]_\epsilon^{1-\epsilon} = 2\sqrt{\epsilon - \epsilon^2} - 2\epsilon.$$

Låt oss bestämma en primitiv funktion för beräkning av första integralen. Vi får

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx = \begin{bmatrix} t \coloneqq \sqrt{x} \\ t^2 = x \\ 2tdt = dx \end{bmatrix} = 2 \int \sqrt{1 - t^2} dt = \begin{bmatrix} t \coloneqq \sin\varphi \\ dt = \cos\varphi \\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{bmatrix} = 2 \int \sqrt{1 - \sin^2\varphi} \cos\varphi \, d\varphi$$
$$= 2 \int \sqrt{\cos^2\varphi} \cos\varphi \, d\varphi = 2 \int |\cos\varphi| \cos\varphi \, d\varphi = 2 \int \cos^2\varphi \, d\varphi$$
$$= 2 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi \right) d\varphi = 2 \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right] = \varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi = \varphi + \sin\varphi\cos\varphi$$
$$= \arcsin t + t \cos\arcsin t = \arcsin t + t\sqrt{1 - t^2} = \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{1-x};$$

därför är

$$\int_\epsilon^{1-\epsilon} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx = \left[\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{1-x}\right]_\epsilon^{1-\epsilon}$$
$$= \arcsin\sqrt{1-\epsilon} + \sqrt{1-\epsilon}\sqrt{\epsilon} - \arcsin\sqrt{\epsilon} - \sqrt{\epsilon}\sqrt{1-\epsilon} = \arcsin\sqrt{1-\epsilon} - \arcsin\sqrt{\epsilon}.$$

Vi har sålunda funnit

$$I_\epsilon = 2\left(\arcsin\sqrt{1-\epsilon} - \arcsin\sqrt{\epsilon}\right) - 2\left(2\sqrt{\epsilon-\epsilon^2} - 2\epsilon\right)$$
$$= 2\arcsin\sqrt{1-\epsilon} - 2\arcsin\sqrt{\epsilon} - 4\sqrt{\epsilon-\epsilon^2} + 4\epsilon \to 2\arcsin 1 = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

då $\epsilon \to 0$.

Svar: $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{xy}} = \pi$.