Uppgift 6.51

Beräkna värdet av

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

där $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < z < 1\right\}$.

Lösning: D är tydligen den del av innandömet av konen $x^2+y^2=z^2$ som ligger mellan $z=0$ och $z=1$. Låt D_ϵ vara den del av D som ligger ovanför $z=\epsilon$ för varje $\epsilon > 0$. Med cylindriska koordinater får vi då

$$I_\epsilon \coloneqq \iiint_{D_\epsilon} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \\ J = r \end{bmatrix} = \iiint_{E_\epsilon} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} drd\varphi dz$$

där

$$E_\epsilon = \{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \varphi \in [0, 2\pi[, \quad z \in]\epsilon, 1[, \quad r < z\}.$$

Alltså är

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \iiint_{E_\epsilon} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} drd\varphi dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_\epsilon^1\left(\int_0^z \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)dz\right)d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_\epsilon^1 \left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_{r=0}^z dz\right)d\varphi = \left(\sqrt{2}-1\right)\int_0^{2\pi}\left(\int_\epsilon^1 zdz\right)d\varphi = \\ &= \left(\sqrt{2}-1\right)\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=\epsilon}^1 d\varphi = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\epsilon^2)d\varphi = \pi\left(\sqrt{2}-1\right)(1-\epsilon^2) \to \\ &\to \pi\left(\sqrt{2}-1\right) \end{aligned}$$

då $\epsilon \to 0$.

Svar: $\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \pi\left(\sqrt{2}-1\right)$.