Uppgift 6.6b

Vi skall beräkna

$$\iint_D x \cos \sqrt{y} \, dxdy$$

där området D ges av $\sqrt{y} \leq x \leq 2$. Rita området. Uppenbarligen måste $y \geq 0$ (ty annars är $\sqrt{y}$ inte definierat) samt $x \geq 0$ (eftersom $V_{\sqrt{}} = [0, \infty[$). Vidare är $x \leq 2$ och $y \leq x^2$; D är alltså området *under* parabeln $y = x^2$ mellan $x = 0$ och $x = 2$. För varje sådant x sträcker sig området från $y = 0$ till $y = x^2$. Således

$$\iint_D x \cos \sqrt{y} \, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} x \cos \sqrt{y} \, dy \right) dx.$$

Den innersta integralen är

$$\int_0^{x^2} x \cos \sqrt{y} \, dy = \begin{vmatrix} t = \sqrt{y} \\ t^2 = y \\ 2tdt = dy \end{vmatrix} = x \int_0^x 2t \cos t \, dt = |\text{Part.int.}| = 2x \left([t \sin t]_0^x - \int_0^x \sin t \, dt \right) =$$
$$= 2x^2 \sin x + 2x \cos x - 2x.$$

Därför är

$$\iint_D x \cos \sqrt{y} \, dxdy = \int_0^2 (2x^2 \sin x + 2x \cos x - 2x) dx = |\text{Part.int.}| = 12 \sin 2 - 2 \cos 2 - 10.$$