Uppgift 6.9 a

Beräkna

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$$

där D är disken av radie 2 kring origo.

Lösning: Vi inför planpolära koordinater

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{1}$$

med funktionaldeterminantens[1] belopp ρ. Området D i xy-planet svarar då mot rektangeln $E := [0,2] \times [0,2\pi[$ i $\rho\varphi$-planet. Alltså är

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_E e^{\rho^2}\rho\,d\rho d\varphi = \int_0^2 \rho e^{\rho^2}\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{1}{2}e^{\rho^2}\right]_0^2 \cdot 2\pi = (e^4-1)\pi.$$

Svar: $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = (e^4-1)\pi$ där D är disken av radie 2 kring origo.

---

[1] Detta kan man i huvudet. Annars är funktionalmatrisen

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

så att funktionaldeterminanten

$$\frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

som har beloppet

$$\left|\frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)}\right| = |\rho| = \rho.$$

Notera att variabelbytet som det står i (1) är ”från nya till gamla”, d.v.s. åt ”rätt håll”, så det funktionaldeterminantsbelopp vi skall gångra in vid variabelbytet är precis ρ (och alltså inte $1/\rho$).