Volym med staplar

Beräkna volymen av den kropp i $\mathbb{R}^3$ som begränsas ytorna $z = x^2 + 2y^2$ och $2x + z = 2$.

Lösning: $z = x^2 + 2y^2$ är en elliptisk paraboloid och $2x + z = 2$ är ett plan. Vi skall tydligen vara innanför paraboloiden men under det sneda ”taket” $2x + z = 2$. Beteckna kroppen med K; då är dess volym $V(K) = \iiint_K dxdydz$.

Vår idé är att bestämma volymen med metoden med staplar. Vi bestämmer därför skuggan (projektionen) av kroppen på xy-planet. För att bestämma skuggan bestämmer vi först skuggans rand, vilken uppenbarligen är skuggan av skärningskurvan mellan paraboloiden och planet. Låt oss bestämma denna skärningskurva. De två ytornas ekvationer ger tillsammans

$$x^2 + 2y^2 = 2 - 2x \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x+1)^2 + \left(\sqrt{2}y\right)^2 = 3.$$

Skuggan av K på xy-planet är alltså $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \quad (x+1)^2 + \left(\sqrt{2}y\right)^2 \leq 3, \quad z = 0\right\}$. Stapeln över $(x,y,0)$ har höjden $h(x,y) \coloneqq 2 - 2x - (x^2 + 2y^2)$.

Om vi inför

$$D \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad (x+1)^2 + \left(\sqrt{2}y\right)^2 \leq 3\right\}$$

så har vi därför

$$V(K) = \iiint_K dxdydz = \iint_D h(x,y)dxdy = \iint_D \left(2 - 2x - (x^2 + 2y^2)\right)dxdy = \begin{bmatrix} u = x+1 \\ v = \sqrt{2}y \\ J = 1/\sqrt{2} \\ E = \{u^2 + v^2 \leq 3\} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_E (3 - u^2 - v^2)dudv = \begin{bmatrix} u = \rho\cos\varphi \\ v = \rho\sin\varphi \\ J = \rho \\ F = \left[0,\sqrt{3}\right] \times [0,2\pi[\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_F (3 - \rho^2)\rho d\rho d\varphi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{3}} (3\rho - \rho^3)d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{9}{4} \cdot 2\pi = \frac{9}{2\sqrt{2}}\pi.$$

Svar: Kroppens volym är $\frac{9}{2\sqrt{2}}\pi$.