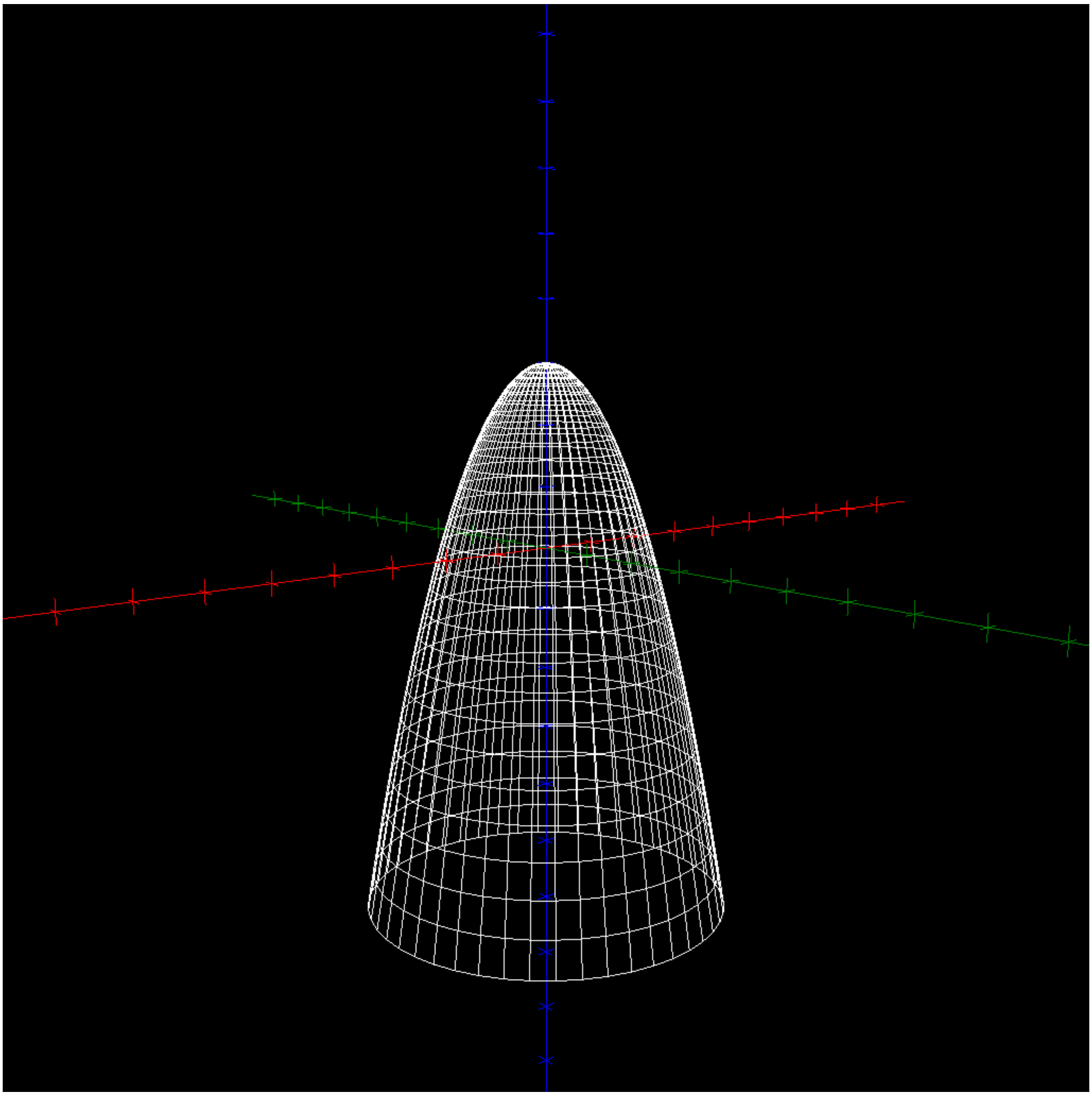
Tentamensuppgift 2011-08-22 1

Beräkna arean av den del av paraboloiden $z = 3 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför ytan $z^2 - x^2 - y^2 = 3$ då $z \geq 0$.

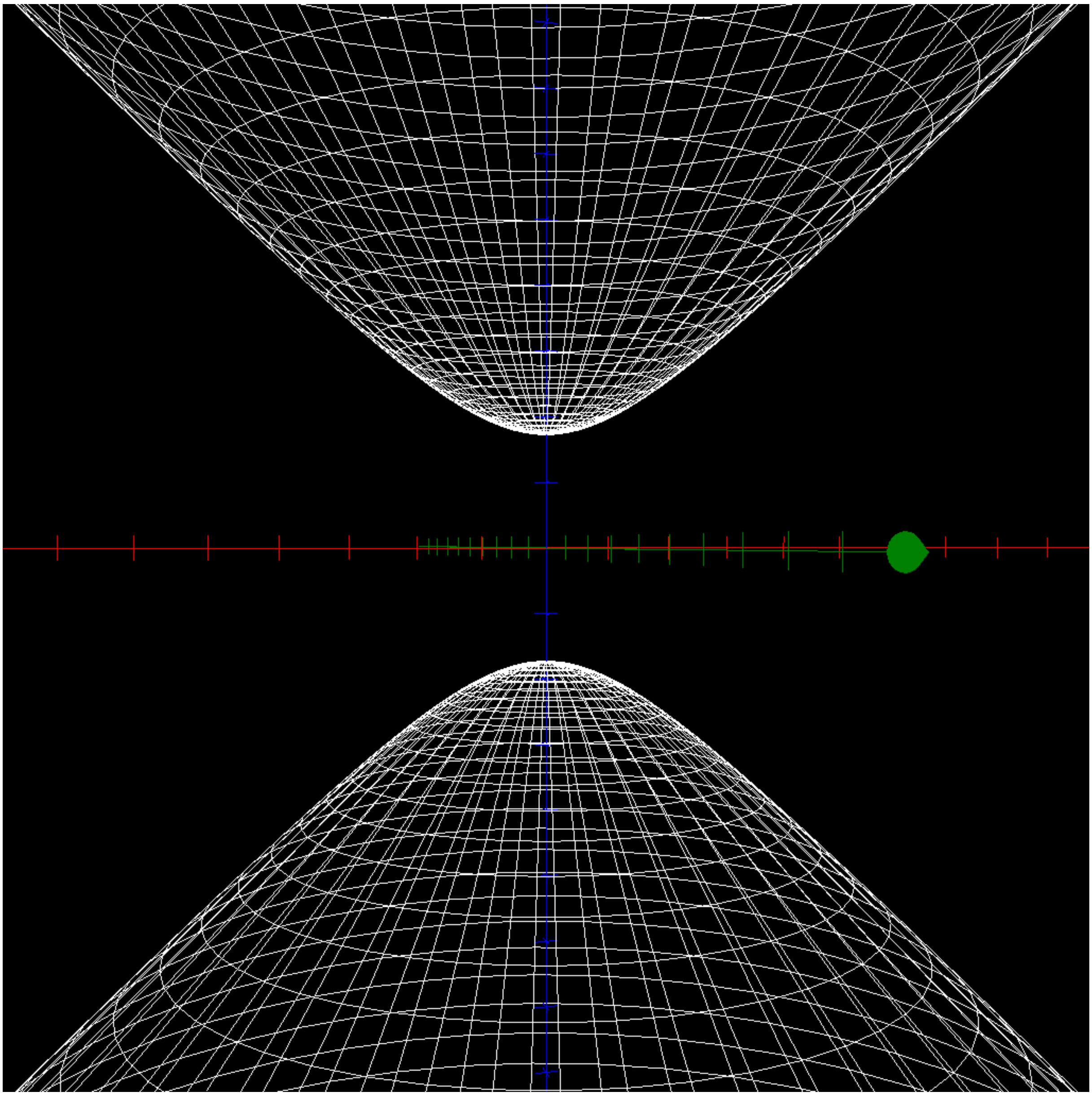
Lösning: $z = 3 - x^2 - y^2$ är förstås en paraboloid:



Beträffande den andra ytan har vi

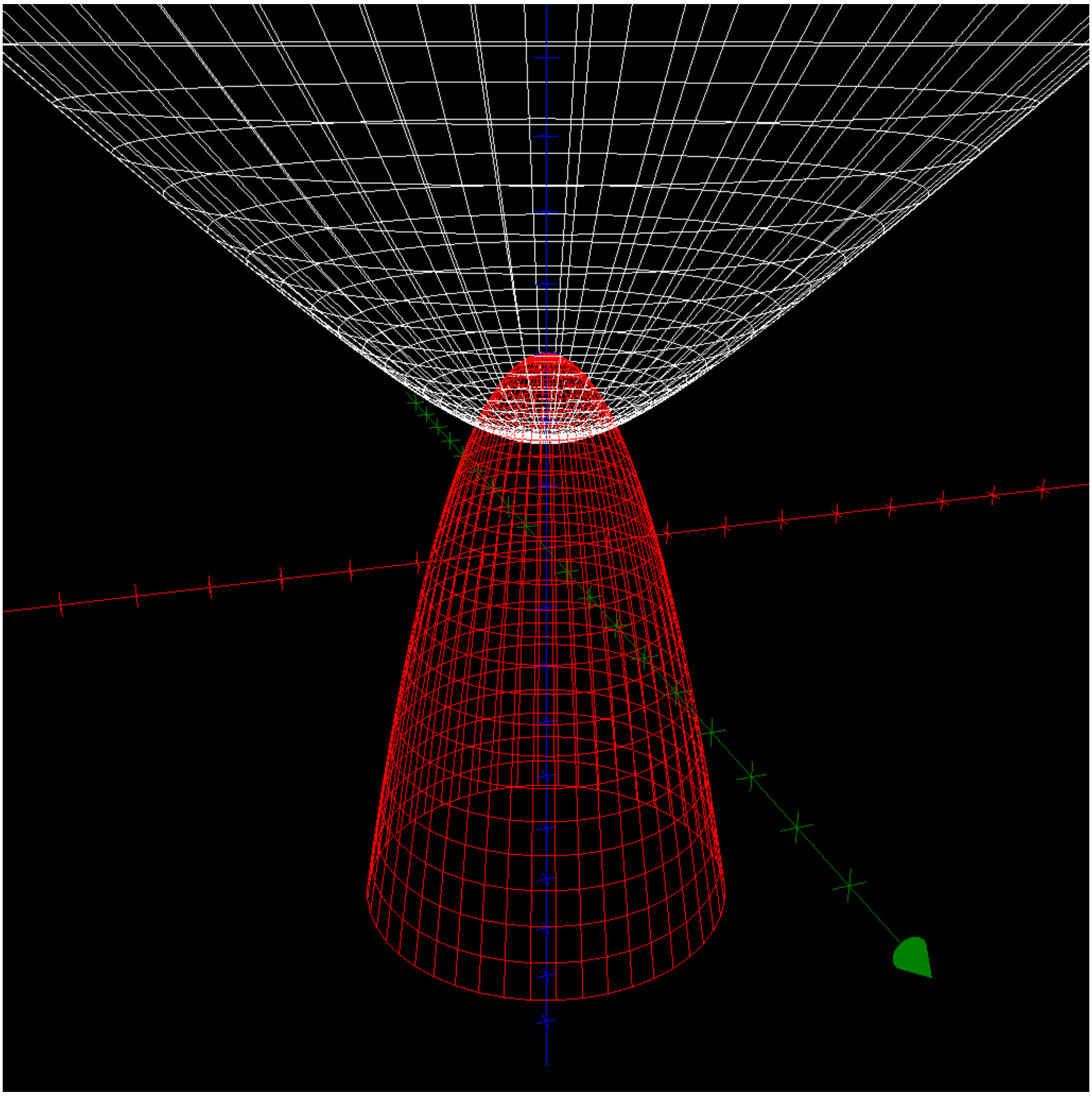
$$z^2 - x^2 - y^2 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 - z^2 = -3$$

där vi känner igen den senare ekvationen som den för en tvåmantlad hyperboloid:



Notera att den tvåmantlade hyperboloiden (som namnet utlovar) består av två disjunkta komponenter (två delar som inte skär varandra), en i $z > 0$ och en i $z < 0$.

Med ”den del av paraboloiden $z = 3 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför ytan $z^2 - x^2 - y^2 = 3$ då $z \geq 0$” avses den del av paraboloiden som ligger **ovanför den övre** av hyperboloidens komponenter, d.v.s. den del av den röda paraboloiden som ligger ”innanför” den vita hyperboloidkomponenten i följande bild:



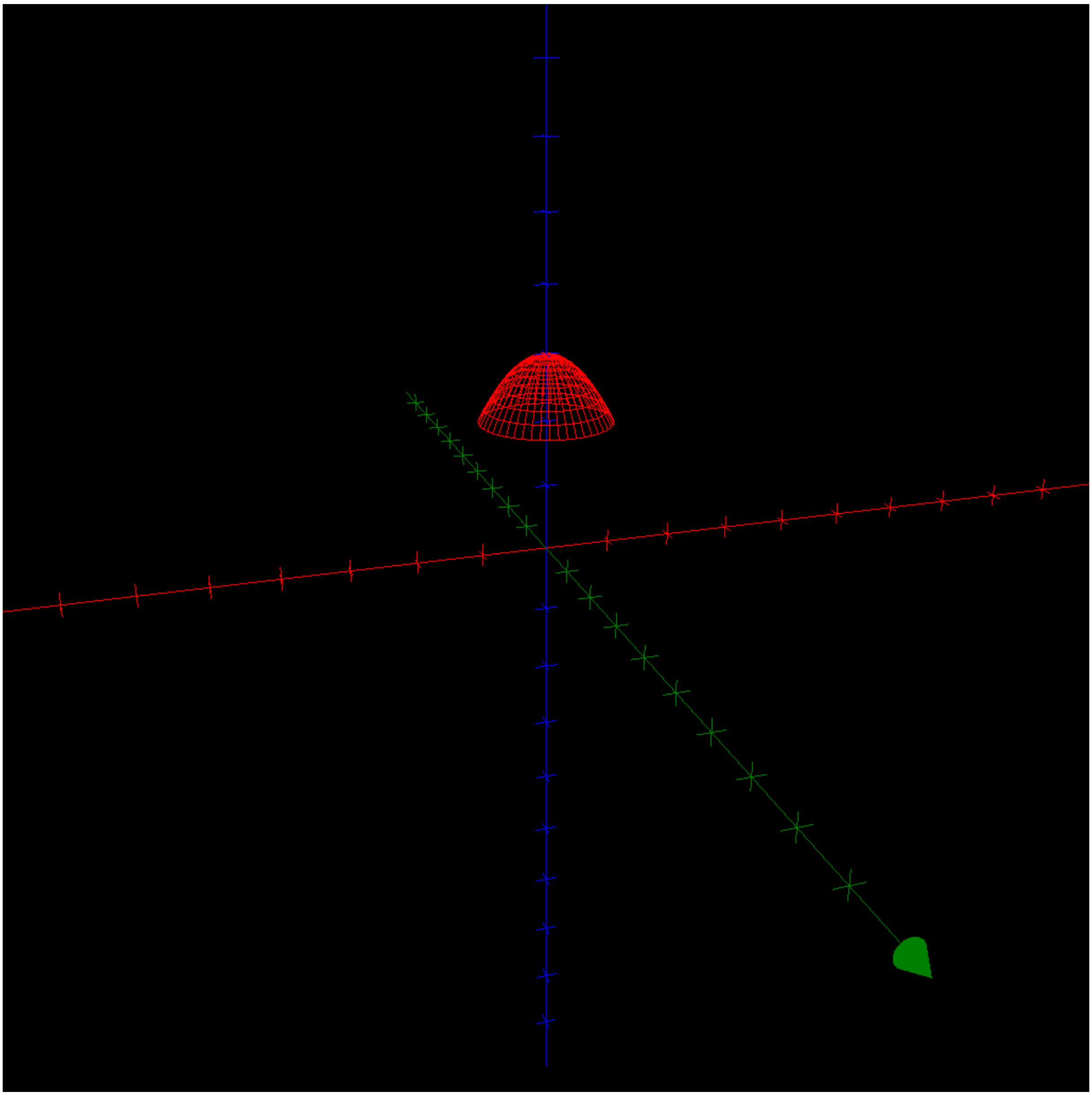
Det är naturligt att fråga sig var de två ytorna skär varandra. Låt (x, y, z) tillhöra skärningskurvan. Då är

$$\begin{cases} z = 3 - x^2 - y^2 \\ z^2 - x^2 - y^2 = 3 \\ z \geq 0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} z^2 + (z-3) = 3 \\ z \geq 0 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad z = 2$$

så att skärningskurvan ligger på höjden $z = 2$ (vilket stämmer med vår bild!). Om vi stoppar in $z = 2$ i paraboloidens ekvation (t.ex.) får vi

$$2 = 3 - x^2 - y^2 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 + y^2 = 1.$$

Vår uppgift är med andra ord att bestämma arean av den del S av paraboloiden som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 1$, se bild.



Denna är bilden $\mathbf{r}(D)$ där

$$\mathbf{r}(u,v) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} u \\ v \\ 3 - u^2 - v^2 \end{pmatrix}$$

och D är den fyllda enhetsdisken i uv-planet (eftersom $x^2 + y^2 \leq 1$).

Vi får

$$\mathbf{r}'_u(u,v) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}'_v(u,v) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

så att den sökta arean är

$$A \coloneqq \iint_S dA = \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv = \iint_D \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} du dv = \begin{bmatrix} u = \rho \cos \varphi \\ v = \rho \sin \varphi \\ J = \rho \\ E \coloneqq [0, 1] \times [0, 2\pi[\end{bmatrix} =$$

$$= \iint_E \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} du dv = \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{1}{12} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \right]_0^1 \cdot 2\pi =$$

$$= \frac{1}{12} \left(5\sqrt{5} - 1 \right) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} \left(5\sqrt{5} - 1 \right).$$