Tentamensuppgift 2011-08-22 4

Vi skall bestämma en potential för vektorfältet

$$\mathbf{A}(r,\theta,\varphi) = 2r\hat{\mathbf{r}} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

och sedan beräkna kurintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ där Γ är skärningskurvan mellan planet $x = y$ och den del av ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$ som ligger i $x, y \geq 0$, $0 \leq z \leq \sqrt{2}$. Orienteringen hos Γ är moturs sett från punkten $(1, -1, 0)$.

Lösning: Låt potentialen heta Φ; då är $\mathbf{A} = \nabla\Phi$. I sfäriska koordinater har vi alltså

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial r} = 2r \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{r} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta}. \end{cases} \tag{1}$$

Vi får

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 2r \quad \Longrightarrow \quad \Phi(r,\theta,\varphi) = r^2 + f(\theta,\varphi) \\
&\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 2\sin\theta\cos\theta \quad \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow \quad \Phi(r,\theta,\varphi) = \sin^2\theta + g(r,\varphi) \\
&\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\sin\varphi \quad \Longrightarrow \\
&\qquad \Longrightarrow \quad \Phi(r,\theta,\varphi) = \cos\varphi + h(r,\theta).
\end{aligned}$$

Från detta **misstänker** vi att

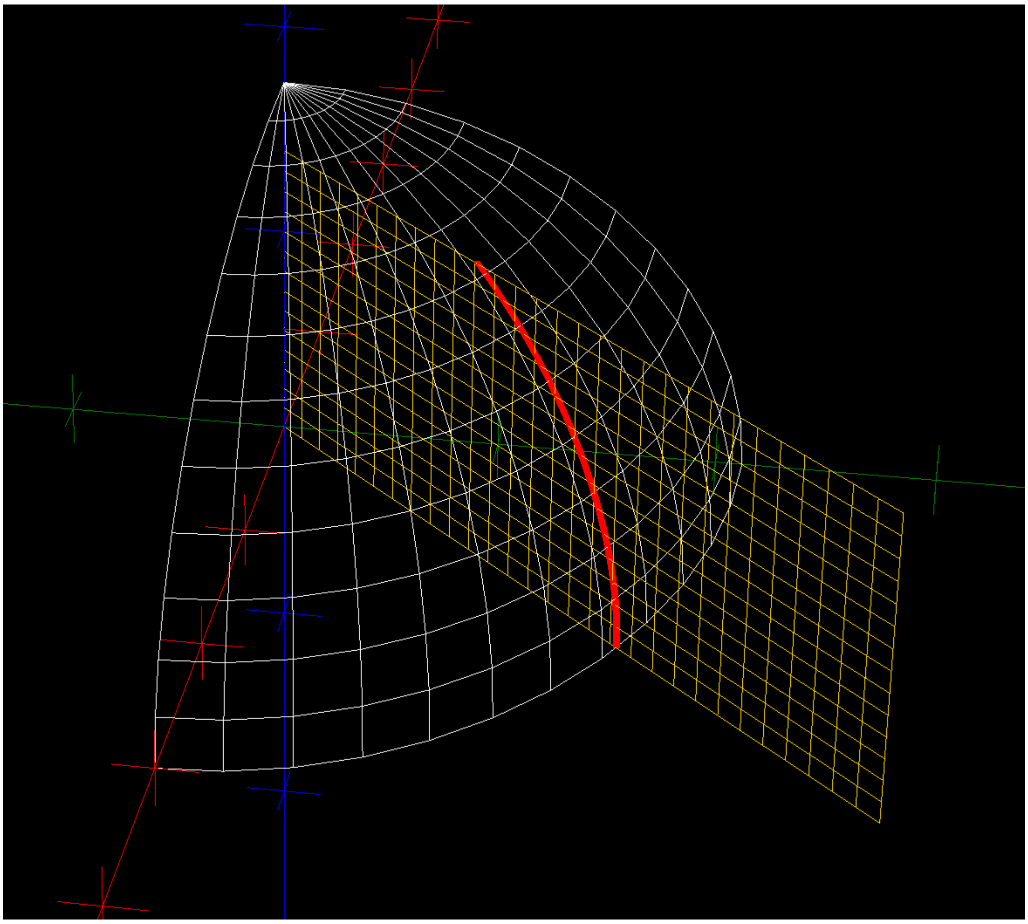
$$\Phi(r,\theta,\varphi) = r^2 + \sin^2\theta + \cos\varphi$$

är en potential, och **prövning** i (1) visar att Φ duger. [Detta är *inte* det systematiska sättet att hitta den allmänna lösningen till (1). Det systematiska sättet är ju att gå i ett sicksack-mönster. Men vi behöver inte bestämma den allmänna lösningen, utan bara hitta *någon* lösning, och det har vi ju uppenbarligen gjort! (De flesta vektorfält saknar ju potential, och för att bevisa att (1) *saknar* lösning måste man vara systematisk.)]

Nu när vi vet att $\mathbf{A}$ är ett potentialfält och vi har bestämt en potential kan vi förstås beräkna kurvintegralens värde bara genom att beräkna skillnaden i potential mellan slut- och startpunkt på kurvan. Ellipsoidens ekvation kan skrivas

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3/\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

så det är en koordinataxelparallell ellipsoid med halvaxellängderna 3, $3/\sqrt{2}$ och $\sqrt{3}$ längs x-, y-respektive z-axlarna. Nedan visas kurvan Γ, som uppenbarligen ligger i halvplanet $\varphi = \frac{\pi}{4}$:



Startpunkten ligger i xy-planet på linjen $x = y$ och har de sfäriska koordinaterna

$$(r, \theta, \varphi) = \left(\sqrt{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

där $r = \sqrt{6}$ kommer av att $x^2 + 2y^2 + 3 \cdot 0^2 = 9$ med $x = y$ medför $x = y = \sqrt{3}$ (så $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{6}$).

Slutpunkten ligger i planet $z = \sqrt{2}$ (en bit under den övre begränsningen $z = \sqrt{3}$ för ellipsoiden) på linjen $x = y$ och har de sfäriska koordinaterna

$$(r, \theta, \varphi) = \left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

där $r = 2$ kommer av att $x^2 + 2y^2 + 3 \cdot \sqrt{2}^2 = 9$ med $x = y$ medför att $x = y = 1$ (så $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$) och $\theta = \frac{\pi}{4}$ kommer av att avståndet från z-axeln är $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$ och höjden är $z = \sqrt{2}$ så

$$\frac{\text{avståndet från } z\text{-axeln}}{z} = 1$$

vilket ger $\theta = \frac{\pi}{4}$. Därför är arbetet

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) - \Phi\left(\sqrt{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{5}{2}.$$