Tentamensuppgift 2013-08-28 5

Beräkna $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

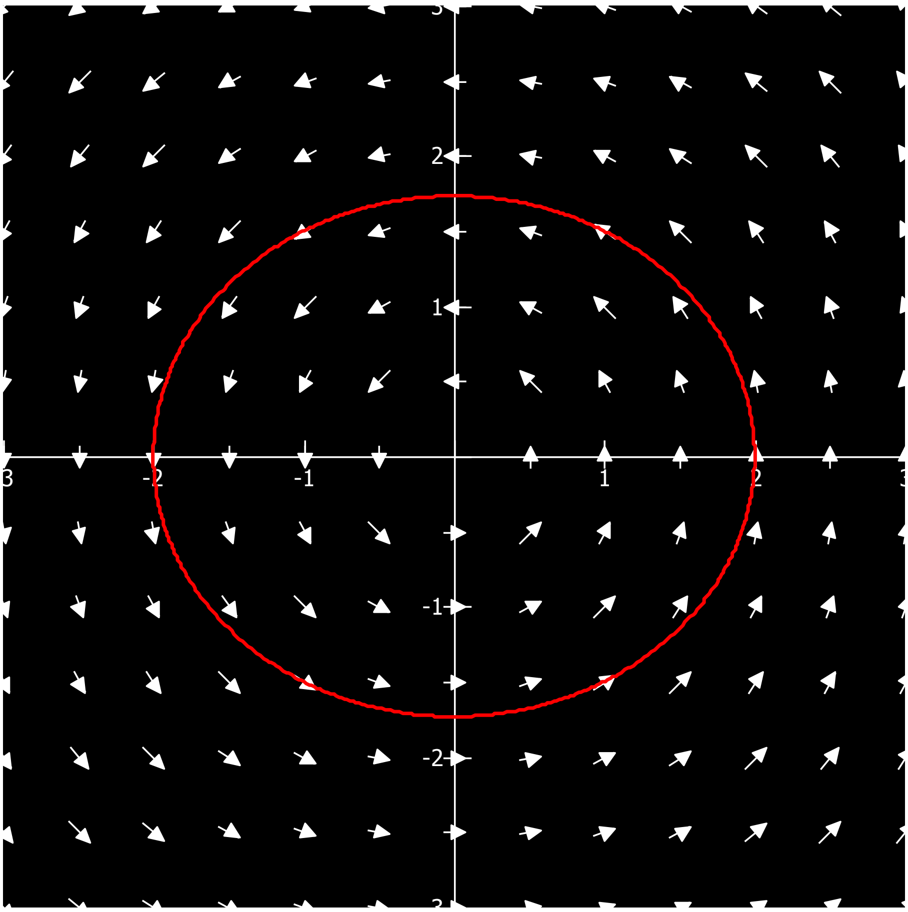
och

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 3x^2 + 4y^2 = 12\}.$$

Lösning: Ekvationen för Γ kan skrivas

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

så det är en koordinataxelparallell ellips med halvaxellängderna 2 och $\sqrt{3}$ i x-led respektive y-led. Vi inser direkt att arbetet måste vara positivt eftersom vi har ”medvind” under hela ”resan”:



(I bilden är alla vektorer lika långa. I verkligheten minskar deras belopp med ökat avstånd från origo.)

Man kan förstås lösa uppgiften utan något trixande alls. Vi har ju

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

så att vektorfältet kan skrivas

$$\mathbf{A}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$$

i kartesiska koordinater, samtidigt som $\Gamma = \mathbf{r}([0,2\pi[)$ där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\cos t\\\sqrt{3}\sin t\end{pmatrix}.$$

Detta ger integralen

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\mathbf{A}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\cos^2 t+3\sin^2 t}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\sin t\\2\cos t\end{pmatrix}\cdot\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\sin t\\\sqrt{3}\cos t\end{pmatrix}dt = \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{2\sqrt{3}\sin^2 t+2\sqrt{3}\cos^2 t}{4\cos^2 t+3\sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{2\sqrt{3}}{\cos^2 t+3\cos^2 t+3\sin^2 t}\,dt = \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{2\sqrt{3}}{\cos^2 t+3}\,dt\end{aligned}$$

som kan beräknas med standardmetoder från envariabelanalysen, även om den är något bökig.

Vi väljer *i stället* att lösa uppgiften med lite trixande med Greens formel. Vi inser nämligen att

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

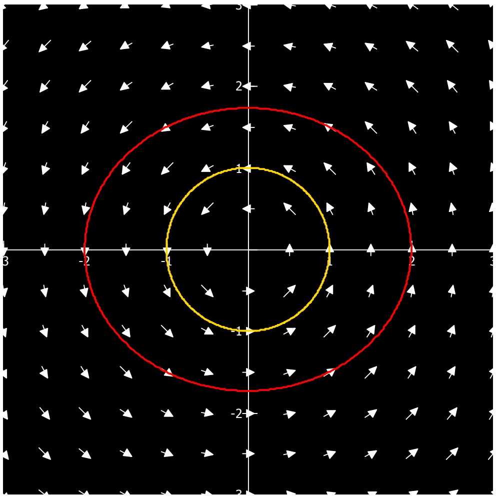
där $\mathbf{A}(x,y) = \big(P(x,y),Q(x,y)\big)$. Inför nu enhetscirkeln

$$C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad x^2+y^2=1\}$$

och låt D beteckna området i planet mellan C och Γ. Greens formel säger att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

där C genomlöps **medurs** (för vi måste ha området D till **vänster** om oss när vi beräknar en kurvintegral i Greens formel).



Vi har alltså

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}.$$

För enkelhets skull beräknar vi arbetet när vi går ett varv kring C *moturs* i stället. Låt C' beteckna samma kurva som C, fast tagen moturs. Då gäller

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}.$$

Enhetscirkeln $C' = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$ där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

så att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{A}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\cdot \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\,dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$