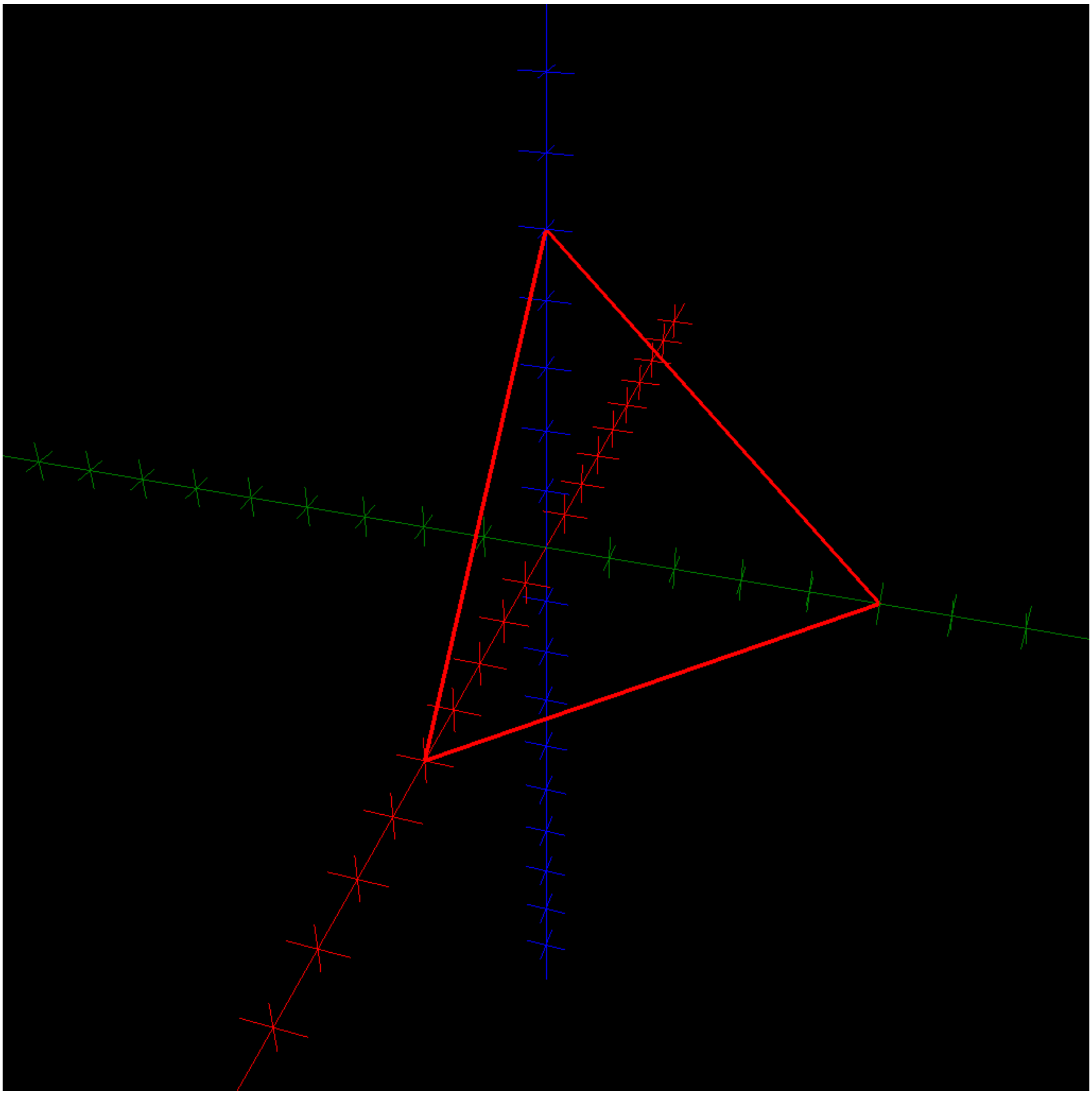
Tentamensuppgift 2014-08-27, 2

Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} y^2 + 2xz - y \\ z^2 + 2xy - z \\ x^2 + 2yz - x \end{pmatrix}$$

och låt Γ vara triangeln (kurva) med hörn i $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$. Beräkna $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, där Γ genomlöpes ett varv moturs sett från $(17,17,17)$.



Lösning: Vi kan naturligtvis lösa uppgiften på vanligt sätt, genom att dela upp Γ i sina tre sidor, parametrisera dessa var för sig och summera ”kraft gånger sträcka” i varje fall. Till exempel, den del Γ_1 av Γ som ligger i xy-planet är bilden $\mathbf{r}([0,1])$ där $\mathbf{r}(t) = (1-t, t, 0)$ så att arbetet här är

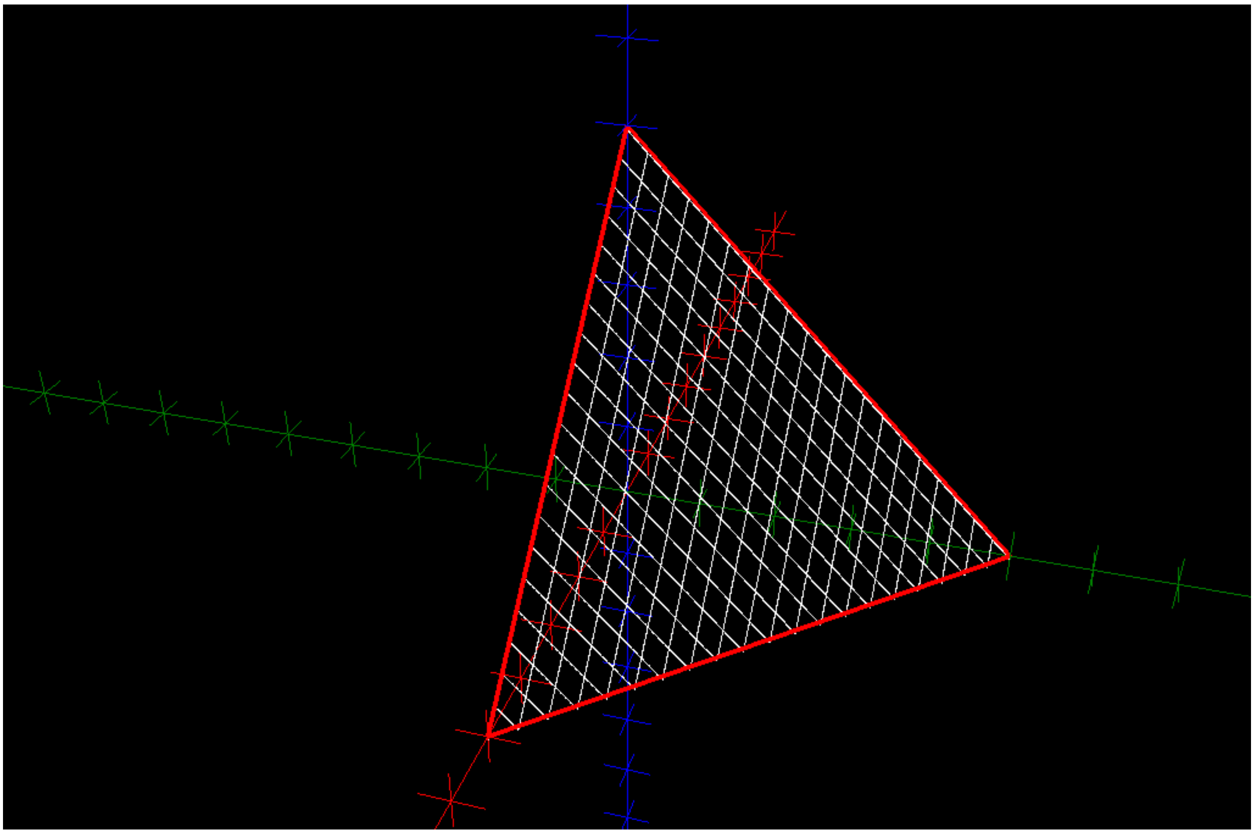
$$W_1 = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{A}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} t^2 - t \\ 2(1-t)t \\ (1-t)^2 - (1-t) \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^1 (-t^2 + t + 2(1-t)t)dt = \frac{1}{2}.$$

De två andra linjestyckena som bygger upp triangeln Γ hanteras på liknande sätt. (Slutligen summeras förstås de tre ”arbetena” W_1, W_2 och W_3 vi får fram.)

Alternativt kan vi använda Stokes sats. Rotationen

$$(\nabla \times \mathbf{A})(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Stokes sats säger nu att det sökta arbetet (kurvintegralen) är lika med flödet av vektorfältet $\nabla \times \mathbf{A}$ genom *någon* yta i rummet som har Γ som rand[1]. Det finns förstås oändligt många ytor i rummet som har Γ som rand. Varje ”plastpåse” som är uppsatt i den trekantiga ”hållaren” Γ duger. Den i särklass *enklaste* ytan som har Γ som rand är däremot (förstås) den del av planet $x + y + z = 1$ som ligger innanför Γ, d.v.s. den vita ytan i bilden nedan.



[1] rand: som yta, inte som allmän delmängd av rummet.

Låt oss kalla den här ytan för S. Eftersom S är en del av grafen till det plana skalärfältet $(x, y) \mapsto 1 - x - y$ kan vi använda x och y som parametrar när vi parametriserar S. Vi har $S = \mathbf{r}(D)$ där

$$\mathbf{r}(u, v) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 - u - v \end{pmatrix}$$

och parameterområdet D är mängden av alla punkter (u, v) som skall stoppas in i $\mathbf{r}$ för att S skall erhållas, d.v.s. i princip skuggan av ytan S i xy-planet, d.v.s. D är den fyllda triangeln i uv-planet som har punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$ som hörn. Vi får därför att flödet av $\nabla \times \mathbf{A}$ genom S är

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_D (\nabla \times \mathbf{A})\big(\mathbf{r}(u, v)\big) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)\, dudv = \iint_D \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dudv = \iint_D 3\, dudv$$
$$= 3 \iint_D dudv = 3\, A(D) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Nu beräknade vi tydligen flödet av $(\nabla \times \mathbf{A})$ genom S i riktning *från* origo. Om vi går ett varv runt Γ i Γ:s riktning med huvudet i denna normalriktning har vi ytan S till *vänster* om oss, så orienteringen stämmer. Stokes sats säger därför att kurvintegralen

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = + \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \frac{3}{2}.$$