Uppgift 3.10

Vi skall beräkna arean av ytan $S = \mathbf{r}(D)$ där

$$\mathbf{r}(u,v) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ h - \dfrac{hu}{R} \end{pmatrix}, \qquad \forall (u,v) \in D$$

där $D \coloneqq [0,R] \times [0,2\pi]$ och $h > 0$.

Lösning:

(Notera att ytan är en kon.) Parameterkurvornas hastighetsvektorer är

$$\mathbf{r}'_u(u,v) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ -\dfrac{h}{R} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}'_v(u,v) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

normalvektorfältet är

$$\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \dfrac{hu}{R}\cos v \\ \dfrac{hu}{R}\sin v \\ u \end{pmatrix}$$

och areaelementet är

$$dA = |\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)|dudv = \sqrt{\frac{h^2u^2}{R^2} + u^2}\, dudv = \sqrt{\frac{h^2}{R^2} + 1}\, ududv$$

eftersom $u \geq 0$. Sålunda är arean av ytan

$$A(S) = \iint_D dA = \iint_D \sqrt{\frac{h^2}{R^2} + 1}\, ududv = \sqrt{\frac{h^2}{R^2} + 1} \int_0^R udu \int_0^{2\pi} dv = \sqrt{\frac{h^2}{R^2} + 1} \cdot \frac{1}{2}R^2 \cdot 2\pi =$$

$$= \sqrt{\frac{h^2}{R^2} + 1} \cdot R^2 \cdot \pi = \sqrt{h^2 + R^2} \cdot R \cdot \pi = R\pi\sqrt{h^2 + R^2}.$$